内容提要

《数学小品译丛》译自美国数学协会《多尔恰尼介绍性著作》丛书，全套七集，每集收数学精品若干篇，各篇独立成章，并配有丰富的习题。该丛书文笔清新优美，叙述简洁生动，内容引人入胜，确不失为数学小品中之佳作。

这本《数学瑰宝》第一辑计收《一个古老的中国定理及费马》等十三篇小品，文中插入不少趣闻轶事，并附有相应的参考文献、阅读建议及练习选解等，以利读者学习。

本丛书特别适宜中学生及中学教师学习、参考，对于大学生及一般数学工作者也不无阅读价值。

作者为中译本写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的两卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情．我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）．

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸．相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情．这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西．

洪斯贝格尔　1983.4.18

前　　言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的。

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼（Mary P. Dolciani）教授，本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界。

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的。

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，藉以实现她的目的。

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容。预期，各卷都有丰富的习题，很多卷还附有解答。因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料。我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻心。

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠．她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然．管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意．

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F. Beckenbach)

序　言

本书介绍初等数学中十三个专题．各章都有单一的主题，至少讲到一件数学上的瑰宝之作．介绍这些专题，是希望读者能够领略到初等数学中某些最优美发现的那种令人心花怒放的感情．

把数学同音乐相比，往往是很合适的：蹩脚的演奏会把最迷人的音乐搞得一团糟；同样拘泥于呆板的合乎程式的讲解，也会把很多光彩夺目的数学思想弄得黯然失色．本书是想使读者陶醉于某些数学精品的极妙的意境之中．我讲解这些作品总是尽力使读者能够循序渐进，赏心悦目，而不致垂头丧气．

不管读者水平如何，必须有适当的底子，才能轻松愉快地读下去．说一个主题是初等的，不一定就是说它容易或者简单．就本书大部分内容而言，除了中学数学以外，读者不需要具备什么专门知识，只假定读者熟悉二项式定理、数学归纳法以及算术同余式．然而，对于许多刚从中学毕业的大学生说来，这本书不见得很容易读，要有一定程度的数学修养，有时还需要相当仔细的思考．我们希

望．本书对于中学教师以及未来的教师将会具有特别的意义．

各篇文章实际上是独立成章的，可以按任何次序来读．每章末尾都附有练习、参考文献以及进一步阅读的建议．读者应该仔细考虑那些练习，因为其中安排有某些极好的问题．

我想借此机会感谢博厄斯（Ralph Boas）博士，他对本书的审阅使本书产生了许多重大的改变．我还想感谢四位同事：默蒂（U．S．R．Murty）博士协助撰写了“柯泽勒夫—格林贝格关于哈密尔顿回路的理论”一章，密勒（Fred Miller）、舍伦贝格（Paul Schellenberg）博士以及安得森（Ed Anderson）评阅了本书部分手稿．最后，我感谢厄尔迪什（Paul Erdös）教授指出了几处不确切的叙述，提供了各种有益的评论和建议．

洪斯贝格尔（Ross Honsberger）

于滑铁卢大学

目　录

一、一个古老的中国定理及费马

1．费马小定理　法国数论大师费马（Pierre de Fermat）1640年致贝斯（Bernard Frenicle de Bessy）书中不加证明地提出了下列定理：

若 p 是素数，a 是任何整数，则 a^p-a 被 p 整除[1]．

例如，23是素数，所以 $a^{23}-a$ 被23整除，不管 a 是什么数（正，负或零）．费马声称他是有证明的，但是并没有把证明写在信里．第一个公开发表的证明属于欧拉（Euler），那几乎是一百年以后的事了，虽然有证据说明莱布尼兹（Leibniz）大约在1683年就得到证明了．由此可见，要想得到一个容易的证明，那是近乎奢望．因此，如果告诉你这个定理可以只用二项式定理和数学归纳法直接加以证明，这肯定是你意想不到的．由于这个证明相当吸引人，而这个定理又是如此基本，所以稍费笔墨把它抒一遍．

让 p 表示素数．当 $a=0$ 及 $a=1$ 时，a^p-a 的

---

[1] 费马实际上提出的是一个等价的定理：若 p 是素数，则对任何与 p 互素的整数 a 而言，p 整除 $a^{p-1}-1$．——原注．

值是零，可以被 p 整除．让我们先考虑 a 是正数的情形，用归纳法进行．

假设命题对某个正整数 a 成立，即是 p 整除 a^p-a，我们来证明命题对 $a+1$ 这个值也成立，即是

$$(a+1)^p-(a+1) \text{ 被 } p \text{ 整除．}$$

二项式定理给出

$$(a+1)^p$$
$$=a^p+C_p^1a^{p-1}+C_p^2a^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}a+1,\quad ①$$

移项得

$$(1)\qquad (a+1)^p-a^p-1$$
$$=C_p^1a^{p-1}+C_p^2a^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}a.$$

我们发现，等式右端每个系数 C_p^k，$k=1, 2, \cdots, p-1$，都可被素数 p 整除．事实上，考虑 C_p^k 本身的定义，即

$$C_p^k k!=p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1),$$

这里 p 整除右端，所以它也必定整除左端；但就所涉及的所有系数而言，k 的值都小于 p，所以素因子 p 不可能出现在乘积 $k!$ 中．因此，p 必须整除 C_p^k．

因为 p 整除上面的等式（1）右端每个系数，所以它必定整除整个右端，从而它也整除左端，即整除 $(a+1)^p-a^p-1$．再把这个事实和 p 整除 a^p-a

①这里的 C_p^k 原文作 $\binom{p}{k}$，今用通用记号，下仿此．——译注．

这个归纳假设结合起来，我们看出，p 整除和式

$$[(a+1)^p-a^p-1]+[a^p-a]$$
$$=(a+1)^p-(a+1),$$

这就是所要证明的．于是，按照归纳法，命题对所有正整数 a 成立．

现在考虑 a 的负值，把证明做完．让我们把所说的负值记为 $-a$，所以 a 本身表示一个正整数．如果素数 p 是 2，我们有

$$(-a)^p-(-a)=(-a)^2-(-a)$$
$$=a^2+a=a(a+1).$$

这里，因于 a 和 $(a+1)$ 是相邻的整数，所以其中有一个是偶数，它们的乘积可以被 2 整除．如果 p 是奇素数，我们有

$$(-a)^p-(-a)=-a^p+a=-(a^p-a).$$

由于 a 是正整数，我们已经知道 p 整除 a^p-a，所以它也整除 $-(a^p-a)$．

2．一个古老的中国定理　当 $a=2$ 时，费马定理说，若 p 是素数，则 2^p-2 可以被 p 整除．自然可以问一下逆定理的情形如何：

若正整数 $n>1$ 且整除 2^n-2，则 n 是否为素数？

中国人曾经对 n 的许多值检验过这个命题，在 2500 年前就断定说，答案是"肯定"的．现代的计算也曾证实，当 $1<n<300$ 时，整除 2^n-2 的那些 n 的值都是素数．

可是，不难验证，这个古老的中国定理是不对的。数 $n=341$ 提供了一个反例。341 是 11 乘 31，不是素数，但它却整除 $2^{341}-2$。为了推出这个事实，我们利用一个熟知的结果：对任何正整数 m，x^m-y^m 具有因子 $x-y$。我们有

$$\begin{aligned}2^{341}-2&=2(2^{340}-1)=2[(2^{10})^{34}-1^{34}]\\&=2[(2^{10}-1)(\cdots)]=2[(1023)(\cdots)]\\&=2[3(341)(\cdots)].\end{aligned}$$

象 341 这样的整数 n，不是素数，但却整除 2^n-2，就叫做**假素数**。

于是，就发生了和假素数有关的一些问题：341 是否是唯一的假素数？是否有无穷多的假素数？结果，对于每个奇假素数，都有一个更大的奇假素数（见练习 6）。因此，从一个奇假素数 341 出发，就可以产生无穷多的奇假素数。

其次，曾经考虑过是否存在偶假素数的问题。只是在 1950 年美国人雷默尔（D. H. Lehmer）才发现了假素数 161038。尽管发现这个假素数是很困难的，但却容易看出 161038 是假素数。161038 的素因子分解是 (2)(73)(1103)，由于

$$2^{161038}-2=2(2^{161037}-1),$$

我们只须证明，73 和 1103 都整除 $2^{161037}-1$。

由于 161037 有素因子分解 $(3^2)(29)(617)$，所以

$$2^{161037}-1=(2^{9})^{(29)(617)}-1^{(29)(617)}$$

$$=(2^{9}-1)(\cdots)=(511)(\cdots)=7(73)(\cdots),$$

这就表明上式被 73 整除．同样，我们有

$$2^{161037}-1=(2^{29})^{(9)(617)}-1^{(9)(617)}$$

$$=(2^{29}-1)(\cdots)=1103(486737)(\cdots),$$

这就表明 1103 也是一个因子．由于 73 和1103 都是素数，其中一个可以整除并不影响另一个是否可以整除，所以它们的乘积可以整除 $2^{161037}-1$．① 这样一来，161038 是一个偶假素数．

1951 年，阿姆斯特丹（Amsterdam）的比格尔（N．G．W．H．Beeger）证明了偶假素数也有无穷多．

3．最极端的假素数　整除 $2^{n}-2$ 的合成数 n 是假素数．整除$3^{n}-3$ 或 $4^{n}-4$等等的合成数 n，我们认为，也具有某种假素数的性质．一个合成数 n 如果整除 $2^{n}-2$，$3^{n}-3$，$4^{n}-4$，…以及对**任何整数** a，即使是负整数，也整除 $a^{n}-a$，肯定是这方面最极端的情形，称为**绝对假素数**．

现在你自然很想知道，是否存在什么绝对假素数．答案是“存在”．最小的一个是 561．这就是说，561是一个合成数，而 $a^{561}-a$ 可以被 561 整除，不论 a 是什么整数．这是不难证明的，直接从费马

①这里原文是“这两个数都能整除 $2^{161037}-1$”．——译注．

小定理推出．

561 的素因子分解是 (3)(11)(17)．我们必须证明：$a^{561}-a$ 可以被这三个素数的每一个整除．我们有

$$a^{561}-a=a(a^{560}-1)=a[(a^{10})^{56}-1^{56}]$$
$$=a[(a^{10}-1)(\cdots)]=(a^{11}-a)(\cdots).$$

但是据费马定理，$a^{11}-a$ 可被 11 整除，因为 11 是素数．于是，11 整除 $a^{561}-a$．同样可以证明 3 和 17 也都是因子．

另外几个绝对假素数是：

(1) 2821 = (7)(13)(31)；

(2) 10585 = (5)(29)(73)；

(3) 15841 = (7)(31)(73)．

现在还不知道是否存在无限多的绝对假素数．

4．费马数 数 $F_n=2^{(2^n)}+1$，$n=0,1,2,\cdots$，称为费马数．头几个是

$$F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537,$$
$$F_5=2^{(2^5)}+1=2^{32}+1=4294967297.$$

从费马的时代开始就陆续发现，F_0, F_1, F_2, F_3 和 F_4 都是素数．要判定任何更大的费马数是素数还是合成数，并非易事．不过，费马曾经宣称，所有的 F_n 都是素数，他承认他并未得到任何实际上的证明，但他断然声称，他对此是确信无疑的．很可能，费马听说过那个古老的中国定理，并且信以为真，因

为不难证明每个 F_n 都整除 $2^{F_n}-2$。我们可以着手证明如下。

由于头几个费马数已知都是素数，所以就这些费马数而言，结论直接从费马小定理推出，我们只须考虑 $n=5,6,7,\cdots$ 即可。对于 n 的这些值，由归纳法容易推出 $n+1<2^n$，从而 2^{n+1} 整除 $2^{(n)}$。于是，存在一个整数 k，使得 $2^{(n)}=2^{n+1}\cdot k$。因此

$$
\begin{aligned}
2^{F_n}-2 &= 2^{(2^{(2^n)}+1)}-2=2[2^{(2^{(2^n)})}-1]\\
&=2[2^{(2^{n+1}\cdot k)}-1]=2[(2^{(2^{n+1})})^k-1^k]\\
&=2[(2^{(2^{n+1})}-1)(\cdots)]=2\{[(2^{(2^n)})^2-1^2](\cdots)\}\\
&=2[(2^{(2^n)}+1)(2^{(2^n)}-1)(\cdots)]\\
&=2[(F_n)(2^{(2^n)}-1)(\cdots)].
\end{aligned}
$$

这样就可以理解为什么费马声称所有的 F_n 都是素数了。

目前，已经确定了 49 个费马数的性质，其中除了到 F_4 为止的那些数以外，每一个都是合成数①。早在 1732 年就知道费马不对了：那一年欧拉证明了 F_5 可被 641 整除。下面的吕卡定理属于初等数

---

①迄今尚未发现 F_4 以后的任何费马数是素数。费马猜测不对似乎有损于他作为数论大师的声誉，但他提出这个猜测还是有道理的，因为一个半世纪以后，年轻的高斯（Gauss）证明了：只要 n 是费马素数，就可以用圆规直尺作正 n 边形。高斯还提出了逆命题，是由万泽尔（Wantzel）证明的：正 n 边形可以用圆规直尺作图的必要条件是 $n=2^k p_1\cdots p_m$，这里 $k\geq 0$，诸 p_i 是不同的费马素数。——译注。

论的范围，不过我们这里不去证明了：

F_n 的每个因子都具有形状 $2^{n+2}\cdot k+1$.

于是，F_n 的所有因子都是算术级数的项：

$$1,2^{n+2}+1,2\cdot 2^{n+2}+1,3\cdot 2^{n+2}+1,\cdots.$$

对于已知的 n，我们可以把这个级数的各项算出来，检验是否存在 F_n 的因子．就 $n=5$ 而言，我们得到序列 1,129,257,385,513,641，769，…．如果注意到对任何一个数，大于 1 的最小因子一定是素数（因为合成数含有比自身更小的因子，所以不可能是最小的），就可以节省很多时间．于是，在检验 F_5 时，我们不必考虑合成数 129 了．由于 257 是素数，这得试一下，但是它除不尽．还有，385 和 513 都是合成数，可以撇下不管．这就该轮到素数 641 了，它实际上是 F_5 的因子．这个手续基于卓越的法国数论学者吕卡（Edward Lucas）于 1877 年发表的工作．可是，欧拉在这之前一个半世纪就知道几乎同样多的事实了．欧拉在 1747 年的一篇著作里提出这样的结果：F_n 的每个因子都具有形状 $2^{n+1}\cdot k+1$（吕卡的改进只不过是说，k 总是偶数）．看来，他在 1732 年就知道这个事实了，并且利用它找到了因子 641．对于 F_5，我们有 $2^{n+1}\cdot k+1=2^6\cdot k+1=64k+1$，当 $k=10$ 时得到 641．

5．佩班检验法 就在吕卡确定 F_n的因子形式的同一年，佩班（T．Pepin）发表了确定 F_n 是素

数还是合成数的一个卓越的检验法：

F_n是素数的充要条件是：F_n整除$3^{(2^{(2^n-1)})}+1$.

于是，如果能够用什么方法证明F_n不能整除$3^{(2^{(2^n-1)})}+1$就可以断定F_n是合成数．是由于证明了F_{1945}不能整除

$$m=3^{(2^{(2^{1945}-1)})}+1,$$

才确定F_{1945}是合成数的．这是一个真正非同凡响的成就．你能想象出F_{1945}有多大吗？如果说它是一个n位数的话，这个n本身就是580位以上的数字，它就大到这种程度，可是同不能被它整除的那个几乎无法想象的大数m比起来，它就是小巫见大巫了．尽管如此，佩班检验法还是得到了成功的应用，1957年若宾森(R. M. Robinson)发现$5\cdot2^{1947}+1$是F_{1945}的一个因子．现在已知，使F_n是合成数的n有

$n=5$, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 32, 36, 38, 39, 42, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452和1945.

1905年莫尔赫德（J. C. Morehead）曾用佩班检验法证明了F_7是合成数．同年，韦斯特尔（A. E. Western）也独立证明了这个结果．可是，1971

年以前还不知道它有什么因子，直到 1971 年，布里哈特（John Brillhart）和莫里森（Michael Morrison）利用加利福尼亚大学洛杉矶分校的一台计算机才找到下面两个素因子：

$$F_7=2^{(2^7)}+1=2^{128}+1$$

$$=340282366920938463463374607431768211457$$

$$=59649589127497217\cdot 5704689200685129054721.$$

1909 年莫尔赫德与韦斯特尔合作也证明了 F_8 是合成数.目前，它的所有因子仍属未知.在结束本文之前，让我们勾画一下莫尔赫德对 F_7 的处理.使用今天的大型计算机来证明 F_{1945} 是合成数正是用的这种方法.

莫尔赫德需要确定 F_7 是否能整除

$$3^{(2^{(2^7-1)})}+1=3^{(2^{127})}+1.$$

注意，F_7 是一个 39 位数，比 F_7 大的 $3^{(2^n)}$ 的最小值是 $3^{(2^7)}$，这是一个 61 位数。假设用 F_7 去除 $3^{(2^7)}$ 余数是 r，于是 r 含有 39 位数或更少位数.我们可以记

$$3^{(2^7)}\equiv r\ (\mathrm{mod}\ F_7).$$

平方给出 $[3^{(2^7)}]^2\equiv r^2\ (\mathrm{mod}\ F_7)$，这里 r^2 的位数不多于 78。让 r_1 表示 r^2 除以 F_7 的余数，于是

$$[3^{(2^7)}]^2\equiv 3^{(2^8)}\equiv r^2\equiv r_1\ (\mathrm{mod}\ F_7),$$

这里 r_1 的位数不多于 39。平方又给出

$$[3^{(2^8)}]^2 \equiv 3^{(2^9)} \equiv r_1^2 \equiv r_2 \qquad (\mathrm{mod}\ F_7),$$

这里 r_1^2的位数不多于 78, r_2的位数不多于 39. 因此, 如果我们有能力把两个 39 位数乘起来,并且有能力用一个 39 位数去除一个 78 位数, 我们就能够实行上述手续, 随意重复多少次. 最后, 我们得到

$$3^{(2^{127})} \equiv r_{120} \qquad (\mathrm{mod}\ F_7),$$

这里 r_{120} 的位数不多于 39. 于是, $r_{120} = F_7 - 1$ 的充要条件是

$$3^{(2^{127})} \equiv F_7 - 1 \qquad (\mathrm{mod}\ F_7)$$

即 $$3^{(2^{127})} + 1 \equiv F_7 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ F_7).$$

因此, 要做的事就是计算 r_{120}, 看看是否等于 $F_7 - 1$. 莫尔赫德担负起这个愚公移山的任务, 发现 r_{120}不等于 $F_7 - 1$ (你能想象这是在一台 1905 年的台式计算机上进行的吗?). 从而, F_7 不能整除 $3^{(2^{127})} + 1$, 可见 F_7是合成数.

练　习

1. 证明:2047 是假素数,2821 是绝对假素数.

2. 证明:任何两个不同的费马数都是互素的.

3. 证明: 除 F_0 外任何费马数都具有形状 $12k + 5$.

4. 证明: 对任何自然数 n 而言, $2^{(2^n+1)} + 1$ 是

合成数.

5. 证明:下面序列中每个数均可被 3 和7整除:

$$a_1 = 2^{(2^2)} + 5, \quad a_2 = 2^{(2^{(2^2)})} + 5, \quad \cdots,$$

$$a_{n+1} = 2^{a_n - 5} + 5.$$

6. 若 n 是大于 1 的奇假素数,证明:$2^n - 1$ 是(更大的奇)假素数.

7. 证明:若 m 为奇数,则对所有自然数 n 而言,$2^m - 1$ 和 $2^n + 1$ 互素.

8. 证明:每个大于 11 的自然数都是两个合成数之和.

参考文献及进一步的读物

〔1〕 W. Sierpinski, A Selection of Problems in the Theory of Numbers, Pergamon Press, 1964.

〔2〕 D. Shanks, Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Spartan Books, Washington D. C., 1962.

〔3〕 W. Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Warszawa, 1964.

〔4〕 P. Erdös, On the Converse of Fermat's Theorem, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 623—624.

二、波　　萨

1. 波萨的故事　我想给你讲一个非凡的年轻匈牙利人的生平与工作的故事．他叫波萨（Louis Pósa），生于40年代末期，很小的时候就受到杰出的匈牙利数学家厄尔迪什（Paul Erdös)的注意，对他的成长帮助很大．厄尔迪什最近著文谈到他所知道的一些神童，我想给你讲讲他所谈的关于波萨的故事．

你可能还不熟悉厄尔迪什，让我先给你谈一点他的情况．他现在大约60岁，多年来是一位国际知名的数学家，他的主要兴趣在三个方面：组合分析、数论与几何．他与其说是一位理论创建者，不如说是一位解决问题的能手，虽然他的500多篇数学文章中相当大一部分是在100页以上的．几十年来他游历世界许多大学，但是很少访问什么地方是超过几个月的．1970年秋季学期他在滑铁卢大学渡过，在这次访问期间，他给我们谈到了匈牙利的神童．除了几个较小的改动和增补外，下面就是他谈的波萨的故事．

厄尔迪什讲的故事　“我来谈谈波萨，他现在22

岁，写了大约8篇文章．我见到他的时候他还不到12岁．1959年夏天我从美国回去，我听说有个小男孩懂得相当多的数学，他的母亲也是一位数学家．我非常感兴趣，第二天我就和他一起吃饭．在波萨喝汤的那当儿，我问了他下面这个问题．证明：如果有 $n+1$ 个正整数，都小于或等于 $2n$，其中一定有一对是互素的．很容易明白，这样的数如果只有 n 个，命题是不对的，因为到 $2n$ 为止的 n 个偶数中的任何两个都不互素．实际上，我是若干年前就发现这个简单结果的了，但却花了我大约十分钟才找到真正简单的证明．波萨坐在那里喝着汤，过了半分钟左右他说：'如果有 $n+1$ 个正整数，都小于或等于 $2n$，其中必定有两个是相邻的，因而是互素的'．不用说，我的印象很深，我敢说，同高斯（Gauss）只有七岁就求出到100为止的所有正整数之和相比，这是属于同一水平的．"

这时，厄尔迪什讲了他给波萨提出的几个图论问题．为了避免任何误解，让我们在这里插进来简短地介绍一下这方面的材料．

所谓图，我们不是指和轴与坐标有关的什么概念．图是顶点（点）与棱的集合，每条棱联接一对顶点．图怎样画在纸上是不重要的．棱可以画成直线或曲线，它们画得是否相交也不要紧，交叉的棱所得的交点不算成顶点，只有事先给出的顶点才是

图的顶点．一个图也不必包含能够画出的一切可能的棱，即是，一般说来，有许多不同的图具有相同的顶点集．

一条棱的两个端点如果是同一个顶点，这条棱就叫做闭棱．两条或更多的棱连结同一对顶点时就出现重棱．在一般的图里，闭棱和重棱都是允许的．在简单（或严格）图里，闭棱和重棱都不允许出现．在厄尔迪什讲的故事以及本文其余部分中，没有修饰语的"图"总是指简单图．现在继续讲我们的故事．

"从那时起我就有计划地带着波萨工作，在我旅行期间我多次写信给他谈一些问题．他还只有 11 岁时就证明了我给他提出的下面这个定理：一个图如果有 $2n$ 个顶点和 n^2+1 条棱，就一定含有一个三角形．实际上，这是杜岚（Turán）1940 年在匈牙利劳动营摘出来的一个著名定理的特殊情形．我也对波萨提出过下面的问题：考虑一个无穷级数，它的第 n 项是一个分数，分子是 1，分母是整数 1，2，…，n 的最小公倍数；证明：这个级数的和是无理数．这不是很难的，但是，一个 12 岁的孩子居然能够证出来，这确实是令人吃惊的．

"当他只有 13 岁时，我给他解释过 $k=2$ 时的拉姆瑟定理：假定一个图有无限多个顶点，那么或者有一个无限顶点集，其中每两个顶点都由一条棱

连结起来，或者存在一个无限顶点集，其中任何两个顶点都没有棱相连。（顺便提一下，这个定理是已故的拨姆瑟（Frank Ramsey）发现的，他是坎特伯雷（Canterbury）现任大主教的兄弟）。波萨大约花了15分钟就弄懂了.后来他回家了，想了一个晚上，临睡前找到了证明。

"到了波萨大约14岁时，就可以把他当成一个成熟的数学家来交谈了。他学微积分有些困难，指出这一点是有意思的。他从来不喜欢几何；不是他真正喜欢的东西，他决不想去动脑筋。可是，真正吸引他的东西，他却是非常棒。我们第一篇合作的文章是当他14岁半时写的.波萨独立写过几篇有意义的文章，其中有些现在还有很大影响；他那最著名的论哈密尔顿回路的文章，得到过国际上的赞扬，他写的时候却只有15岁呢！

"下面是他独立发现并证明的第一个定理，曾经是数学上的崭新发现：一个图如果有 n 个顶点（$n \geqslant 4$）和 $2n-3$ 条棱，就一定含有一个回路，其中有一条棱是对角线[1]。这个结果是最好的，因为对于每个 n 都可以构造一个图，有 n 个顶点和 $2n-4$ 条棱，但任何回路都不含对角线棱。

[1] 在图论中，道路是指一系列顶点 a_0，a_1，…，a_n，其中任何相邻的顶点都有一条棱相连；如果，$a_0=a_n$，道路称为回路；对角线是连结不相邻顶点的棱。——译注。

"我早先曾经解决过下面一个问题：一个图如果有 n 个顶点（$n\geqslant6$）和 $3n-5$ 条棱，就一定含有两个回路，没有公共顶点。我把这个问题对波萨谈了，过了几天，他得到一个很简单的证明，相比之下，我原先提出的那个复杂证明就逊色得多了。这对一个 14 岁的孩子说来是很了不起的。

"波萨也找到下述结果的一个漂亮证明：任何有 n 个顶点和 $n+4$ 条棱的图都含有两个回路，没有任何公共的棱（这对一般的图也成立。）

"匈牙利为什么有这么多的神童，我想做几点推测：首先，至少 80 年来一直有一份供中学生阅读的数学期刊；其次是有许多数学竞赛，厄伊退什一库尔沙克（Eötvös-Kurshák）竞赛已有 75 年的历史了，第一次世界大战后为中学刚毕业的学生举办过一种新的竞赛，二次大战后也举办过好些新的竞赛。

"几年前举办过一种完全不同的竞赛，是在电视上举行的，聪明的中学生们在规定时间内比赛做题。题目通常是构思巧妙的，解答则由一个专门小组来评判，那是由首屈一指的数学家如阿列克赛兹（Alexits），杜岚以及哈约什（Hajos）等组成的。看来，有很多人怀着极大的兴趣观看这些竞赛，即使他们并不明白那些题目。

"在匈牙利，几年前在布达佩斯开办了一所专

门中学，叫做法泽卡什（Michael Fazekas）中学，培养有数学才能的儿童．这所学校正好在波萨该上中学的时候办的．他非常喜欢这所学校，事实上竟然喜欢得不愿意提前两年毕业升入大学．波萨上法泽卡什中学后不久，就对我谈起他班上他认为在初等数学方面比他好的另一些孩子，其中就有现在已经崭露头角的罗瓦什（Lovász）”．

把上面讲的波萨的故事再添上他的一个样板工作，看来是合适的．那么，让我们详细讲讲他对迪拉克的哈密尔顿回路定理的漂亮证明吧．

2．迪拉克定理 图具有很多有趣的性质．1857年爱尔兰的天才哈密尔顿（William Rowan Hamilton）发明了一种游戏，沿着一个图的各条棱从一个顶点到另一个顶点旅行：首先给出一个具体的图，游戏的目的是在图中找出一条道路，通过每个顶点正好一次①．

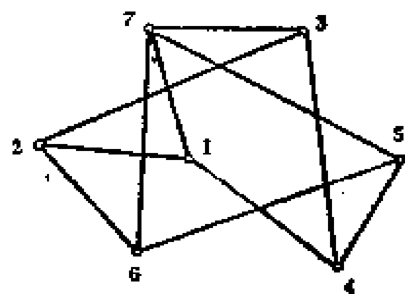


图 2-1

当然，有的图是没有哈密尔顿道路的．如果，除了找出这样的道路外，还可以做到使终点与起点相同，则得到一条哈密尔顿回路而不只是哈密尔顿道路了．尽管从一条哈密尔顿回路总可以去掉任何

①这样的道路就叫做哈密尔顿道路．——译注．

一条棱而得到哈密尔顿道路，但一条哈密尔顿道路却不一定产生哈密尔顿回路（这要看该道路的起点和终点是否碰巧有图中的一条棱联结起来）.

就一个图是否存在哈密尔顿回路而言，已经知道一些必要条件和一些充分条件．例如，棱与顶点数目相等，这是一个必要条件①；图中存在一切可能的棱，这是一个充分条件．可是，甚至到1972年还不知道有什么充要条件．

1952 年，欧洲数学家迪拉克（G．A．Dirac）提出过下列简单的充分条件（顶点的"价"定义为经过该顶点的棱的条数）.

迪拉克定理：有 n 个顶点($n\geqslant3$)的图中，如果每个顶点的价都至少是 $n/2$，则存在哈密尔顿回路.

1962 年波萨提出下面的证明，用的是反证法．假设，图 G 具有 n 个顶点，并且每个顶点的价至少是 $n/2$．如果 G 是一个非哈密尔顿图，即是没有哈密尔顿回路，我们来引出一个矛盾。

首先，我们可以把 G 嵌入一个饱和的非哈密尔顿图 G' 如下：

显然，并非一切可能的棱都含在 G 中，否则 G 已经就是哈密尔顿图了．于是可以考虑把一条不在 G 中的棱镶补进去．如果镶补之后仍然没有哈密尔

①原文如此，显然不对．可以说，"棱的数目至少等于顶点数目，这是一个必要条件"——译注.

顿回路，就让这条棱留在图中．如果镶补之后出现哈密尔顿回路，就再把这条棱取出来．对于每一条不在 G 中的棱都如法泡制，试验的次序无关紧要，这个过程终了时，所得到的图 G' 将仍然是一个非哈密尔顿图，因为任何哈密尔顿回路都不允许保留不动；但是这个图却是饱和的，即是添上任何一条不在 G 中的棱都要产生哈密尔顿回路（否则在我们镶补过程中试验这条棱时，它本应留在图中的）．

镶补棱的过程肯定不会使任何顶点的价减少，所以 G' 的每个顶点的价也至少是 $n/2$。

由于 G' 是非哈密尔顿图，所以它不可能含有一切可能的棱．假设顶点 v_1 和 v_n 之间的棱不在图中．因为 G' 是饱和的，所以把这条棱镶补进去就会产生哈密尔顿回路．于是，即使没有 v_1v_n 这条棱，图 G' 也必定含有一条从 v_1 到 v_n 的哈密尔顿道路（镶补 v_1v_n 这条棱只是把这条道路补成一条回路）．让我们把这条道路中 n 个顶点的次序记为 v_1，v_2，v_3，$\cdots$，v_{n-1}，v_n。

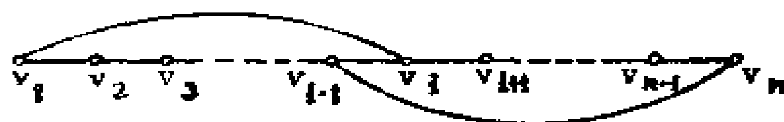


图 2-2

好了，如果顶点 v_1 碰巧和顶点 v_i 相联，我们问：顶点 v_n 是否有可能和 v_{i-1} 相联？回答是"不能"．因为，如果 v_n 与 v_{i-1} 相联，那么 G' 就会含有哈密

尔顿回路

$$v_1v_iv_{i+1}\cdots v_nv_{i-1}v_{i-2}\cdots v_2v_1.$$

这是不可能的，因为 G' 是一个非哈密尔顿图.

尽管 v_1 与 v_n 不相联，但我们知道 v_1 的价至少是 $n/2$，所以当 i 从 2 变到 $n-1$ 时，v_1 至少与 $n/2$ 个顶点 v_i 相联. 从而，当 $i-1$ 从 1 变到 $n-2$ 时，至少有 $n/2$ 个顶点 v_{i-1} 不可能与 v_n 相联. 既然不允许有闭棱，所以 v_n 也不可能与自身相联. 于是，总而言之，不能与 v_n 相联的顶点个数大于 $n/2$，所以能够与 v_n 相联的顶点个数就小于 $n/2$，这和顶点 v_n 的价至少是 $n/2$ 的已知事实矛盾.（证毕）

作为本章的结尾，我们叙述有关哈密尔顿回路的四个新近的定理. 最后一个定理是一位精力充沛的年轻捷克数学家赫瓦塔（V. Chvátal）的工作. 这个定理是他在滑铁卢大学学习期间提出的，不久前他在滑铁卢大学获得博士学位.

迪拉克定理（1952）：有 n 个顶点（$n\geqslant 3$）的图中如果每个顶点的价至少是 $n/2$，则存在哈密尔顿回路.

欧雷定理（1960）：有 n 个顶点（$n\geqslant 3$）的图中如果每一对不相联顶点的价之和至少是 n，则存在哈密尔顿回路.

波萨定理（1962）：命 G 是有 n 个顶点的简单

图．如果对每个 k，$1 \leqslant k < (n-1)/2$，价不超过 k 的顶点数目小于 k，并且当 n 为奇数时，价不超过 $(n-1)/2$ 的顶点数目不超过 $(n-1)/2$，那么 G 含有哈密尔顿回路．

赫瓦塔定理（1970）：命图 G 中顶点的价是 d_1，d_2，…，d_n，排成非降次序．如果对每个 $i < n/2$，或者有 $d_i \geqslant i+1$ 或者有 $d_{n-i} \geqslant n-i$，那么这个图是哈密尔顿图．

练　　习

1．在图 2-3 的每个图中找出哈密尔顿回路．

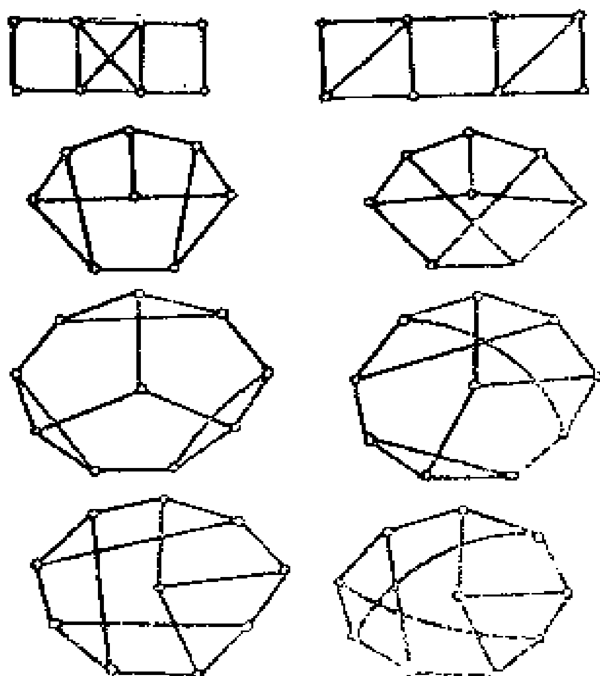


图 2-3

2．证明：图2-4的每个图中都没有哈密尔顿回路．

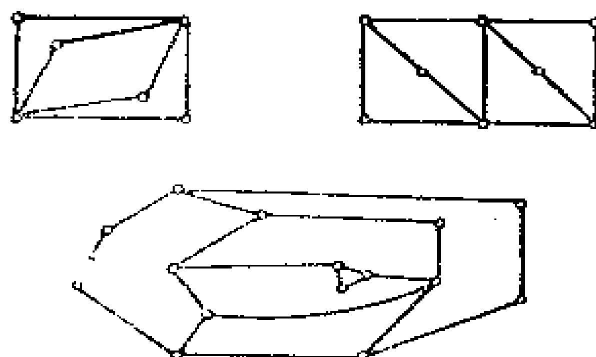
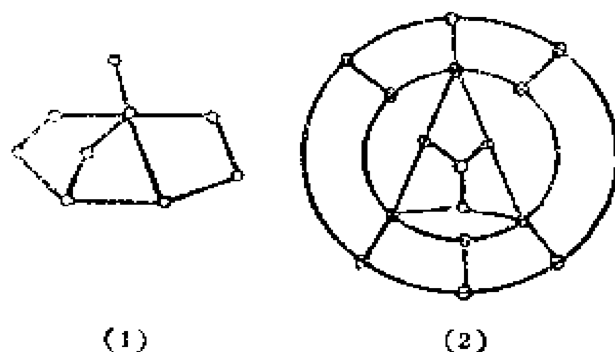


图 2-4

3．证明：图2-5的两图中都没有哈密尔顿道路．



(1)　　　　(2)

图 2-5

4．图2－6中哪些有哈密尔顿回路？哪些只有哈密尔顿道路？

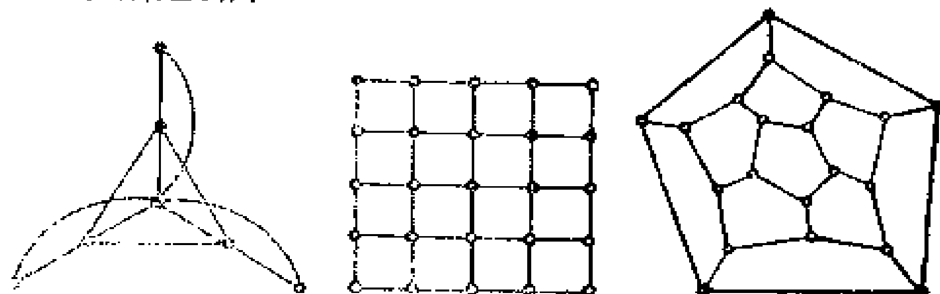


图 2-6

5．三维空间中给了六个点，占有最广位置(即是任何三点不共线，任何四点不共面)．把它们两两连结起来的 $C_6^2=15$ 条线段逐个随机染成红色或蓝色．证明：存在一个三角形，它的三边具有同样颜色．

6．在国际象棋中，使一匹马相继经过所有64个方格的一组着法，叫做一条"马路"；如果这匹马可以从最后一个方格一步走到第一个方格，如此周而复始，这条马路就叫做"马回路．"一条马回路相当于某个图中的一条哈密尔顿回路：这个图相应于每个方格有一个顶点；这个图有一条棱把代表方格 X 和 Y 的两个顶点联结起来的充要条件是：一匹马可以从 X 一步走到 Y．证明：如果 n 是自然数，那么在 $4\times n$ 的棋盘上没有任何马回路．

7．仿照波萨对迪拉克定理的证明给出欧雷定理（见前）的证明．

8．试证明波萨十几岁时搞出来的一些定理．例如，证明：有 n 个顶点和 $n+4$ 条棱的图中，存在两条回路，没有公共棱．这个定理的证明见厄尔迪什和波萨合写的文章"On the Maximum Number of Disjoint Circuits of a Graph", publications Mathematicae, Debrecen, 1962, pp. 3—12，尤其是 P. 9．这份杂志可能有个总标题 Kossuth Lajos Tudomanyegyetem,

Mathematika Intezet.

9. 证明援姆瑟定理. 如果你有困难，就看看下面的方案（如图2－7）．考虑无限顶点序列1，2，3，….假设每一对顶点都有一条棱相联，联结顶点n和$n+p(p>0)$的棱视为在n处开始而在$n+p$处终了．把所有的棱或者染成红色，或者染成蓝色，使得对每个顶点n，在n处开始的所有的棱都有同一种颜色；如果都有红色，n就叫做红点，否则叫做蓝点．哪些顶点是红点而哪些顶点是蓝点并不重要．



图 2-7

(a) 证明：在这样的顶点序列中，或者存在无限多个顶点，其中每两个都有一条红棱相联，或者存在无限多个顶点，其中每两个都有一条蓝棱相联（提示：考虑红点集和蓝点集，其中至少有一个必定是无限集）．

(b) 证明：具有无限多个顶点的任何图中可以确定上面所说的那种顶点序列，从而完成援姆瑟定理的证明．（提示：把图的所有的棱都染成红色，然后把所有不在图中的棱镶补进去，并且把它们都染成蓝色．任取一顶点作为所求序列的顶点1．把与1相联的顶点分成两类：一类叫做R，就是由红棱相联的顶

点组成；一类叫做 B，由蓝棱相联的顶点组成．R 和 B 中至少有一个必定含有无限多个顶点；如果两个都是无限集，就任取一个．为确定起见，假设 R 是无限集，这时在 R 中任取一个顶点作为序列的顶点 2．

对于顶点 2 以及包含它的无限集 R 重复上述分类过程（集合 B 就完全不管了），这样又得到一个无限集，从中任取一个顶点作为序列的顶点3，依此类推．有了这个序列，就容易由款(a)推出 Ramsey 定理了。最后把所有的蓝棱抹掉）．

10．命 A_0，A_1，A_2，…，A_{2n-1} 依循环次序表示正 $2n$ 边形的顶点（如图 2-8），画出所有的边和对角线，这样到得一个图 G．证明：G 的每条哈密尔顿回路都必定包含两条棱，它们在图形中是平行线．

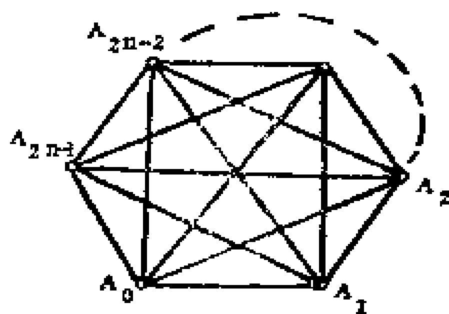


图 2-8

参考文献及进一步的读物

〔1〕 Behzad and Chartrand, Introduction to the Theory of Graphs, Allyn and Bacon, Boston, 1972.

〔2〕 F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, 1969.

三、等边三角形

在这篇文章里，我想给你讲讲有关等边三角形的三个优美的问题．首先复习一下等边三角形的几个简单性质，这样，在我们以后提到它们时，就不必打断我们的叙述再去讨论了。

1．几个简单性质　每个三角形都有外心、内心、重心等，所以，不能泛泛而言说三角形的“心”．可是，拿等边三角形来说，所有这些不同的心都重合，因而等边三角形的心是有毫不含糊的意义的．

让 s 和 a 分别表示一个等边三角形的边和高的长度，由毕达哥拉斯定理知

$$s^2=a^2+\frac{s^2}{4}$$

（图 3-1），所以

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2}s,\quad s=\frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

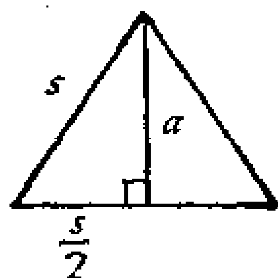


图 3-1

注意，一个等腰三角形的顶角如果是 60°，这个等腰三角形实际上是等边三角形（图 3-2）．再注意，等边三角形的一条边与外接圆上一点所张成的圆周角是 60° 或 120°，就看这个点是在这条边所对的优弧上还是

在劣弧上（图3-3）。

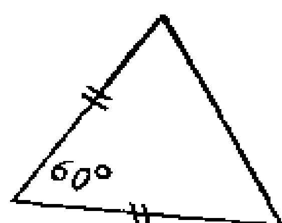


图 3-2

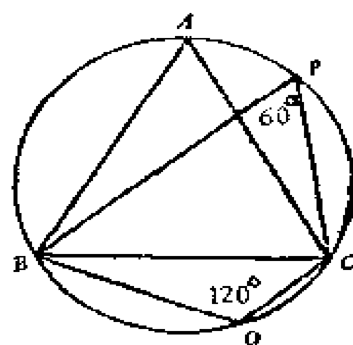


图 3-3

最后，我们来建立一个很简单的结果，叫做维维阿尼定理（Viviani，意大利人，1622—1703）。

维维阿尼定理．等边三角形ABC内一点P到各边的垂线a，b，c之和等于高h．

证．拿面积关系（图3-4）来说有

$$\triangle ABC=\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB$$

$$\frac{1}{2}sh=\frac{1}{2}sa+\frac{1}{2}sb+\frac{1}{2}sc,\quad h=a+b+c$$

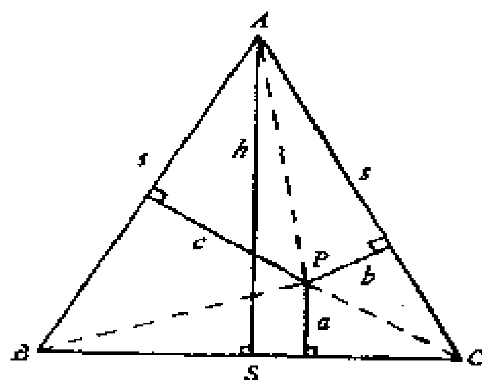


图 3-4

2、费马向托里切利提出的问题　著名的法国

数论家费马（Pierre de Fermat，1601—1665）曾经向伽利略（Galileo）的著名学生、气压计的发明人托里切利（Evangelista Torricelli）提出过下面的问题：

在已知三角形 ABC 内确定一点 P，使和式 $PA+PB+PC$ 最小。

托里切利用好几种方法解过这个问题，我们来讲他那个最简单、最有趣的解法，这个解法基于维维阿尼定理，大约 300 年以后又由匈牙利数学家里兹（Frederick Riesz）重新发现。

原来，如果已知三角形有一个角不小于 120°，那么所求的点 P 就是这个钝角的顶点。我们不讨论这个情形，宁愿讲托里切利限定三角形各内角都小于 120° 的情形时那个最优美的解法。

可以想见，作为这个问题的解的那个点，随着岁月的流逝，逐渐就叫做三角形的费马点了；陆续发现了各种方法来确定费马点的位置，例如，费马点与三角形的每一边都张成一个 120° 的角。让我们把这个作为费马点的定义，来证明它就是我们问题的解。有了这个基础，实际求出已知三角形的费马点的位置的问题就容易解决了，只须在三角形的两条边上向外作两个等边三角形，这两个三角形外接圆的一个交点就是费马点（图3–5）。

让我们把这个费马点叫做 P，于是，托里切利的

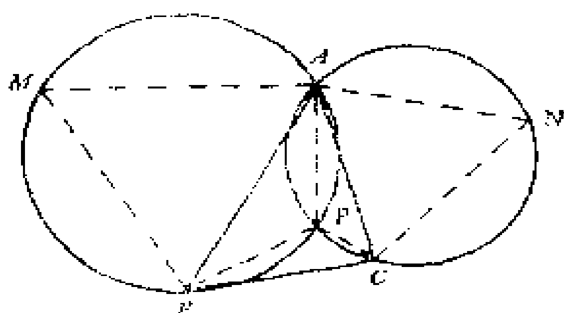


图 3-5

第一步是作 PA，PB 和 PC 的垂线，从而得到已知三角形 ABC 的外接三角形 XYZ(图3-6)，因此，在四边形 $ZAPB$ 中，角 Z 等于 $360^\circ-90^\circ-90^\circ-120^\circ=60^\circ$。同样，角 Y 和 X 也都是 60°，所以 $\triangle XYZ$ 是等边三角形。因此，据维维阿尼定理有 $PA+PB+PC=\triangle XYZ$ 的高 h。

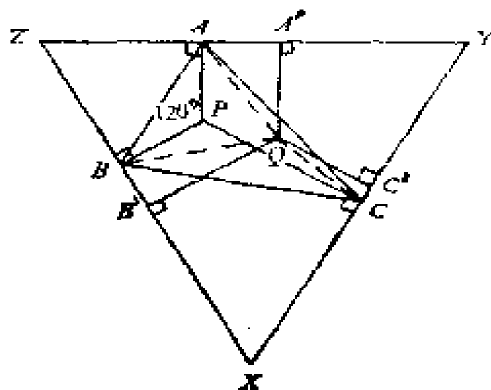


图 3-6

对于$\triangle ABC$ 中任何其他的点 Q，它到 $\triangle XYZ$ 各边的垂线 $QA'QB'$ 和 QC' 之和也是 h。但是，一般说来，直角三角形 QAA' 的斜边 QA 大于直角边 QA'。同样，QB 和 QC 也各大于直角边 QB' 和 QC'。于是，我们有

$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'=h$$
$$=PA+PB+PC,$$

这就证明P是我们问题的解.

注意，上述三个直角三角形中至多只有一个可能退化：斜边与直角边重合（例如Q在PA上即是）。所以QA'，QB'，QC'中至多只有一个真正等于相应的QA，QB，QC. 这就说明下述不等式普遍成立

$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'.$$

当三角形的每一个角都小于120°时，还有另一个巧妙的解法，也同等边三角形有关，是霍夫曼（J. E. Hofmann）在1929年发表的. 这个方法当时并不新鲜，匈牙利数学家伽莱（Tibor Gallai）以及其他一些独立发现的人都应该同享荣誉. 第一步是在已知三角形ABC中任取一点P，然后使$\triangle PAB$绕顶点B向外旋转60°，转到位置$C'P'B$（图3-7）。这就使三角形$C'AB$和$P'PB$都是等腰三角形，而两腰的夹角是60°，所以这两个都是等边三角形，这就是说，不论选取$\triangle ABC$中哪一个点P，旋转的结果总是使A变到同一个位置C'，即是在AB边上向外画出的等边三角形的第三个顶点。

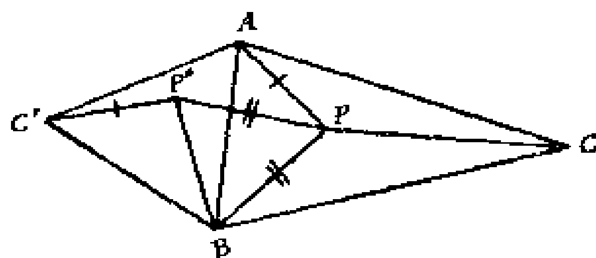


图 3-7

由于 $\triangle P'PB$ 是等边三角形，所以有 $PB=PP'$．旋转的结果使 AP 转到 $C'P'$，所以 $AP=C'P'$．从而

$$PA+PB+PC=C'P'+P'P+PC$$
$$=\text{道路 } C'P'PC \text{ 之长}.$$

不论怎样选取点 P，这条道路的起点总是 C'，终点总是 C．如果可以选取点 P，使这条道路成为直线，问题就解决了．

研究到此，我们还没有把握说，一定有一条直线道路．假如 $C'P'PC$ 是直线，点 P 就应该在直线 $C'C$ 上，而角 BPC' 就应该是 60°（图3–8）．于是，让我们把 C' 和 C 联接起来，用 P 表示这条联线穿过等边三角形 $C'AB$ 的外接圆时的交点（图3–9）．在这个圆上，圆周角 BPC' 是 60°．既然旋转是把点 P 变成一点 P'，使得 $\angle BPP'=60°$，所以，当 P 是 $C'C$ 与外接圆的交点时，像点 P' 就落在 $C'P$ 上，$C'P'PC$ 的确是直线．于是，这样选取的 P 就是问题的解．

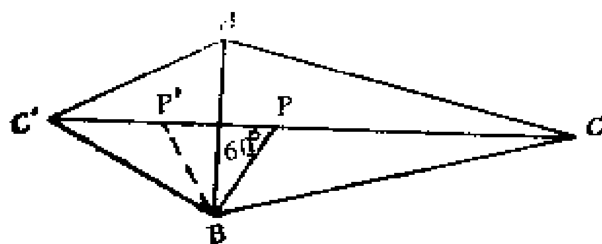


图 3–8

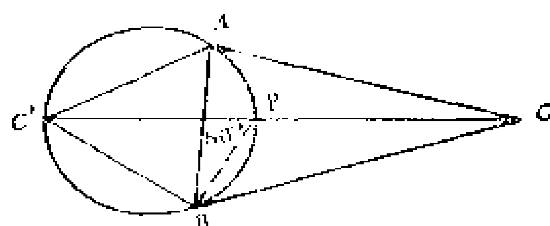


图 3-9

托里切利的解法清楚地表明，我们问题的解是唯一的，所以霍夫曼的解法对三角形的费马点的特性作了另一种说明：费马点是在 AB 边上向外作出的等边三角形的第三个顶点 C' 与相对顶点 C 的联线上．可是，这里并不涉及 C 和 C' 的什么特性；我们本来也完全可以使 $\triangle PBC$ 绕顶点 C 向外旋转 60°，或者使 $\triangle PAC$ 绕 A 旋转，从而对顶点 A 和 B 得到同样的结果．因此，关于把顶点 A，B，C 同相应对边上向外画出的三个等边三角形的第三个顶点 A'，B'，C' 联结起来的三个线段，我们有下面的推论：

线段 AA'，BB'，CC' 具有同样的长度（都等于 $PA+PB+PC$ 的最小值），在费马点 P 处三线共点，彼此相交成60°的角(图3-10)．

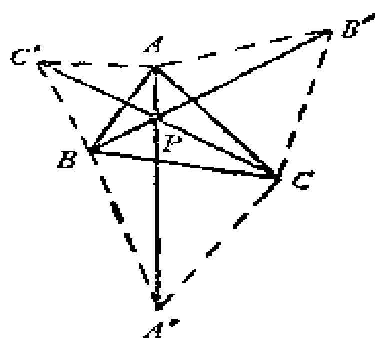


图 3-10

解极大极小问题时，我们一般面临三个问题：(1) 是否有解？(2) 解是否唯一？(3) 解有什么特性？托里切利的工作表明，

与已知三角形各边都张成120°角的那个点 P 所给出的 $PA+PB+PC$ 的值，比三角形其他任何一点所给出的值都小，因此，他把问题的三个方面一下子全解决了．这当然是非常出色的．但是，要说托里切利灵机一动就找到了这个点 P，那是不可想象的．究竟是什么东西使他想到这个点 P 呢？我们大概永远也不会知道了．不过，十九世纪的瑞士几何大家斯忒纳（Jacob Steiner）曾经叙述过使他想出这个解答的一系列漂亮的想法，他的思考过程如下．

首先，他疑心一个顶点是否就可能是问题的解．当 P 是一个顶点时，$PA+PB+PC$ 中有一项为零，而其余两项是三角形的两条边，其实，这个和式的值正好是在所说的那个顶点处相交的那两条边的长度之和．因此，最好的顶点就是两条最短边的交点；最长的边不必考虑．这样，如果解答是一个顶点的话，那就是最长边所对最大角的顶点．

其次，他试图发现，当一点 P 是问题的解而不是顶点时，它有些什么性质．让我们把距离 PA，PB，PC 分别记为 a,b,c，它们的和记为 s．斯忒纳利用了一个非常有用的原理，它对很多类型的极值问题都是适用的：一个极值问题的解，当其中某些变量保持固定以后，它对其余变量而言，往往也必须给出极值．例如，要使整个旅程最小，就必须使

每一段旅程最小．显然，任何使 s 取最小值的点 P 将给出 a,b,c 的一组特殊值．如果 a 保持这个特殊值不变，那么对于使得 $QA=a$ 的那些 Q 而言，解 P 也必须给出和式 $QB+QC$ 的最小值．这就是说，在以 A 为心、a 为半径的圆周上，任何一点 Q 都不能使 $QB+QC$ 这个量（$Q=P$ 时就是 $b+c$）取得比在 P 处更小的值（图3-11）．这就产生下面这样一个有趣的分析．

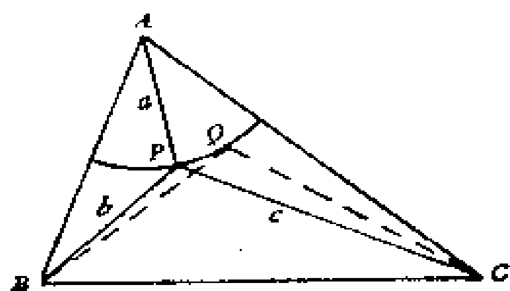


图 3-11

我们先证明顶点 B 和 C 必须在以 A 为心、以 a 为半径的这个圆周之外．拿顶点 B 来说，s 的值是两边之和 $AB+BC$．由于 $PB+PC$ 大于 BC，所以，要是顶点 B 出现在圆内（图 3-12），甚至在圆

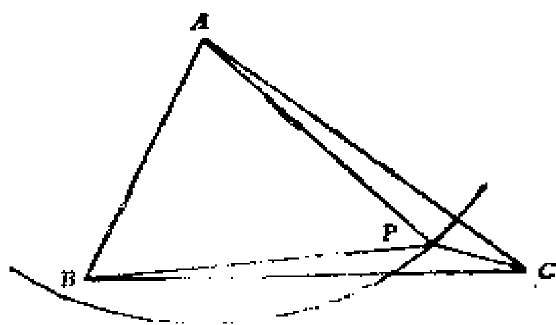


图 3-12

周上，那么半径 PA 就至少要像另一边 AB 那么长．结果，顶点 B 给出的 s 值，即是 $AB+BC$ 就

会比点 P 给出的值 $s=PA+(PB+PC)$ 还要小.因此，顶点 B 必须落在圆外，顶点 C 也一样.

现在考虑一个小椭圆，两个焦点在 B 和 C. 在椭圆的每一点 R 处，我们得到焦点半径之和 $RB+RC$（图3-13）. 我们可以设想这个椭圆是用一只铅笔绷紧一根两头系在 B 和 C 处的丝线画出来的. 如果我们把丝线放长一点，就得到更大一些的椭圆，把原先那个椭圆完全围住. 把丝线放得越来越长，我们就得到各种大小的椭圆；用 E 表示正好与所说的圆周相切的那个椭圆，用 K 表示切点. 由于圆周的任何别的点都在 E 外，所以要使一个椭圆经过其中任何一点，就要把丝线放得更长一些，因为丝线的长度是焦点半径之和. 这样，对于圆周上的那些点 Q 说来，切点 K 给出和式 $QB+QC$ 的最小值. 由于 K 是 E 和圆周的唯一切点，所以它是圆周上唯一一个使 $QB+QC$ 为最小的点. 由于 P 也给出这个最小值，所以必定是 $P=K$.

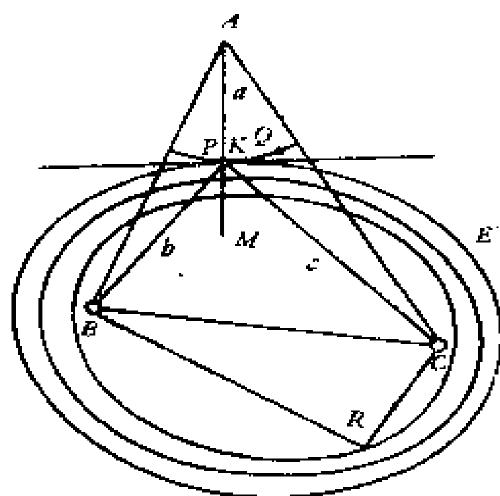


图 3-13

于是，圆周和椭圆 E 在 P 处有一条公切线，半

径 AP 垂直于这条切线，所以它是椭圆 E 在点 P处的法线，可是，大家知道的椭圆反射性质说，通过一个焦点的光线，反射时通过另一个焦点，从而入射角 BPM 等于反射角 MPC。这就是说，如果点 P 是解，那么 AP 的延长线平分角 BPC。但是，这并不涉及点 A 的什么特性，对于 B 和 C 也对，即是 BP，CP 的延长线必定分别平分角 APC 和 APB。

让我们把 BPL 和 LPC 这两个相等的角记为 x。角 $APV=x$，因为它是 BPL 的对顶角（图 3–14）。于是，由于 PV 是角平分线，所以角VPC 也等于 x。同样，角 APB 的每一半都是 x。这就得到 $6x=360°$，$x=60°$。因此，解点 P 与三角形的每一边都张成120°的角（图 3–15）。斯武纳还得到另一些结论，但我们就此刹住了。

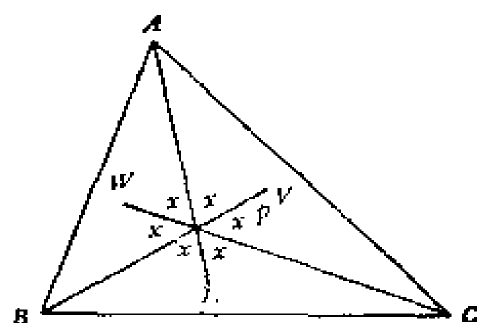


图 3–14

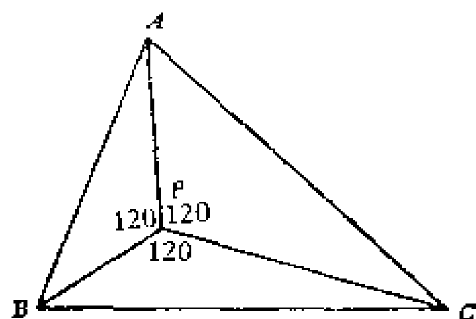


图 3–15

佩多（Daniel Pedoe）在他的小册子《圆》中，对我们的问题提出了一种解法，其依据是托勒

密（Ptolemy）定理的一个推广.

再讲一个利用力学概念的巧妙解法，就结束我们对这个问题的叙述了．阿基米德（Archimede）在两千多年前就发现，考虑同纯数学貌似无关的一些概念，例如质量和能量等，却能在纯数学中产生意想不到的结果．我们还是只考虑已知三角形的每一个角都小于 120° 的情形.

我们设想已知三角形 ABC 位于一张水平面上，在每个顶点处装有一个滑轮，从三角形内一点 P 拉出三根丝线分别经过三个滑轮，每根丝线末端都挂上相同的质量 m（图3-16）．把这个系统放松，

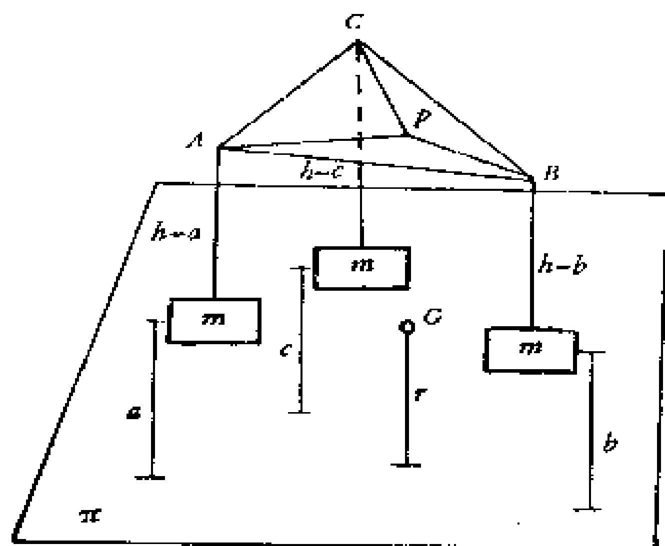


图 3-16

让它在重力的作用下稳定下来，这时点 P 所取的位置就是所求的 $\triangle ABC$ 的费马点，我们论证如下.

在平衡状态下，假设三个质量 m 都出现在某水

平面 π 的上方，高度分别是 a，b，c，整个系统的重心 G 也在 π 的上方，高度是 r。于是，这个系统关于 π 的总位能就是下列方程两端所表示的量：

$$mc+mb+mc=(3m)\cdot r,$$

所以我们有 $r=\frac{1}{3}(a+b+c)$。可是，平衡状态表示位能最小的状态，因此，在这个状态下，G 最低，即是最靠近 π，所以 $a+b+c$ 最小。让 h 表示 $\triangle ABC$ 对 π 的高度。于是，三根丝线铅直部分的长度分别是 $h-a$，$h-b$，$h-c$，其和为 $3h-(a+b+c)$。如果丝线的总长度是 t，那么位于 $\triangle ABC$ 上的水平丝线的总长是

$$s=t-[3h-(a+b+c)]=(t-3h)+(a+b+c).$$

由于 t 和 h 都是常数，而 $a+b+c$ 在平衡状态下是最小，所以这时 s 也是最小。

为了由此引伸出对费马点 P 的一个确切的几何说明，我们指出，点 P 之所以保持平衡，是由于丝线上三个相等张力 f 作用的结果（每根丝线上有相同的质量）。（图3-17）。因此，代表这些张力的三个力向量 f，如果按向量相加，就必须构成一个封闭的等边三角形（图3-18）。可见，三根丝线之间的夹角都是 120°，这就是费马点原来的定义。

我们指出，上述力学解法也给出平面上确定一个凸 n 边形的 n 个点的“最小中心”。可是，对于

这个中心的位置，一般说来，不存在确切的几何说明；在平面上要画一个封闭的等边三边形，即是一个等边三角形，只有一个方法；可是，当 n 大于 3 时，却有很多办法来画封闭的等边 n 边形，所以张力向量之间的夹角不是唯一确定的。

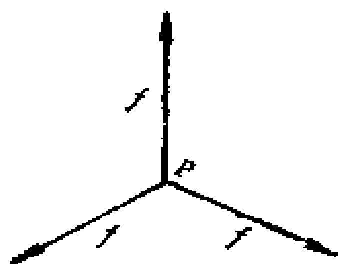


图 3-17

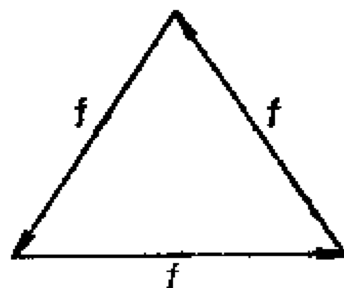


图 3-18

3．拿破仑定理　下面这个定理历史上叫做拿破仑定理，可是，拿破仑（Napoléon）对几何学是否精通到能够独力发现并证明这个定理，却是大可怀疑的。

在已知三角形 ABC 的三边上向外作出的三个等边三角形分别记为 $A'BC$，$B'CA$，$C'AB$，它们的中心记为 X，Y，Z。于是这三个中心构成一个等边三角形（图 3-19）。

我相信，下面是这个定理的一个新证明。

首先画三个等边三角形的外接圆（图3-20）。我们要用到的只是这些圆上的优弧，根本不需要这些等边三角形。用 PQ 表示通过点 A 的一条直线被

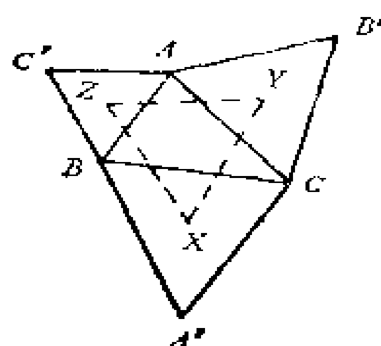


图 3-19

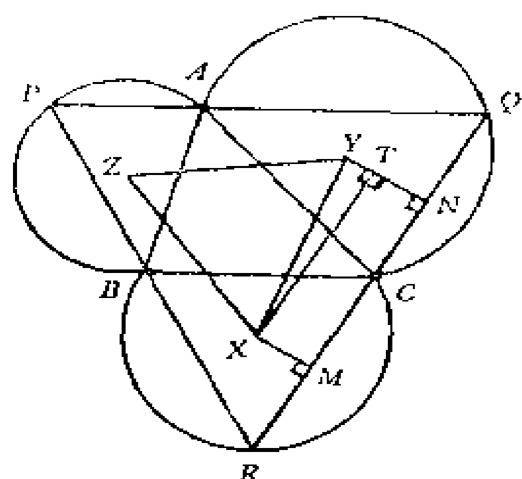


图 3-20

这些优弧截出的线段，于是 PB 和 QC 在点 P 和 Q 处都同 PQ 交成 $60°$ 的角，从而 PB和 QC 的延长线相交在一点 R，交角也一定是 $60°$. 由于点 R 与边 BC 张成 $60°$ 的角，所以 R 在第三个圆弧上. 这就是说，对于弧 AB 上每一点 P 存在已知三角形 ABC 的一个外接等边三角形 PQR，它的每个顶点各在一个优弧上. 现在只须稍微琢磨一下这一族等边三角形中最大的那一个，就立刻推出我们的定理了.

事实上，为了估计一个外接三角形的大小，让我们从圆心 X 和 Y 向 QR 画垂线，垂足 M 和 N 分别是弦 RC 和 CQ 的中点. 作 XT，使 $XMNT$ 成为矩形. 显然，QR 是 MN 的两倍，也是 XT 的两倍. 可是，XT 是直角三角形 XYT 的一个直角边，因而不大于斜边 XY. 当 QR 平行于 XY 时，这个直角三角形退化，结果使得 $XT = XY$，而 Q

R 取得它的最大长度，即是 $2XY$。

同样，边 PQ 的最大值是 $2YZ$，边 PR 的最大值是 $2XZ$。由于 PQR 总是等边三角形，所以它的边长总是相等，因而有同样的最大值，这就是说 $2XY=2YZ=2ZX$，可见 $\triangle XYZ$ 是等边三角形。

4．一个覆盖问题 我们最后的问题是讨论一类平面点集，即所谓"直径为 1 的"点集．一个点集的直径是指满足下述条件的最小数 d："这个集合中任何两点的距离都不大于 d"。例如，半径为 2 的圆周及内部所确定的点集，其直径为 4．如果从这个集合中除掉圆周，那么剩下来的内部仍然具有直径 4；尽管这个集合中任何两点的距离都不大于 4，但是对于每个小于 4 的数 s，这个集合中却存在两个点，它们的距离大于 s．按照正规的说法，直径是集合中两点距离的上确界．如果存在最大距离，这个最大值就是直径．

我们这个问题里要讨论的是整个一类直径为 1 的集合，其中包括形状变化无穷、大小参差不齐的各种连通区域以及孤立点集．即使要想象出这类集合中哪一个算是典型集合，这也是很伤脑筋的．尽管如此，下面这样一个有关这些集合的漂亮结果却是容易证明的：

每个直径为 1 的平面点集都可以被一个边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形完全盖住．

由于一个点集能否被覆盖，依赖于这个集合的大小和形状，所以上面这样一个结果居然能够证明，却是相当令人吃惊的，因为集合的直径同它的大小、形状这些方面似乎关系极少。可是，如果我们认识到边长为$\sqrt{3}$的等边三角形的内切圆本身是直径为1的集合（图3-21），那么我们立刻就感到心宽了，因为我们可以设想先用直径为1的圆把已知集合盖住，然后再用边长为$\sqrt{3}$的等边三角形来盖住这个圆。不幸，我们很快就为这样一个令人吃惊的事实给卡住了：一个直径为1的集合并不总是可以被直径为1的圆盘所盖住。要明白这一点，只须注意，边长为1的等边三角形所确定的点集（直径为1的集合）不可能被直径为1的圆所盖住：它的外接圆的直径是$2/\sqrt{3}$，差不多就是1.15（图3-22）。这个令人吃惊的事实告诉我们，我们实际上面临着一个很不简单的问题。可是，这个问题的确有一个漂亮而简单的解法。

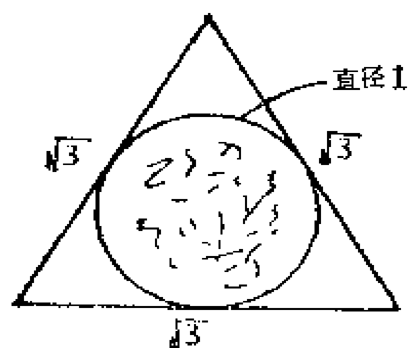


图 3-21

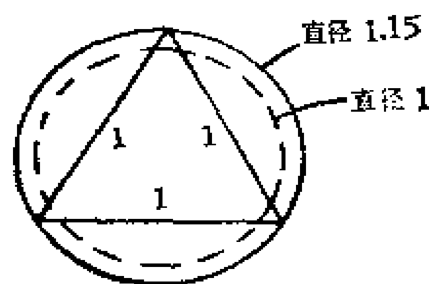


图 3-22

显然，已知集合 S 可以包含在平面上许许多多的条形区域内：每个方向上都有一个最窄的条形区域包含 S. 假设这种最窄的条形区域的两条边界线是 m_1 和 m_2（图 3-23）. 于是可能有两种情况：m_1 及（或）m_2 上可能有或可能没有 S 的点. 如果 S 不含边界点（例如圆的内部），那么直线 m_1 和 m_2 实际上同 S 不接触. 但是，在任何情况下我们都可以有把握地说，这个最窄的条形区域哪怕稍微变窄一点，也会使 S 的点落到它的外面（图 3-24）. 因此，我们容易推出：一个最窄的条形区域 $\widehat{m_1 m_2}$ 的横断距离至多是 1. 事实上，假如条形区域 $\widehat{m_1 m_2}$ 的宽度大于 1，那就可以同时相向移动 m_1 和 m_2，每个都移动同样的宽度，使条形区域变窄到宽度正好是 1，因而使 S 的点落在这个变窄后的条形区域两边之外. 因此，必定存在集 S 的两个点 P 和 Q，其距离大于这个变窄后的条形区域的宽度，即是大于集 S 的直径 1. 但这是不可能的.



图 3-23



图 3-24

让 aa', bb', cc' 表示包含 S 的任何三个最窄的

条形区域，彼此的倾斜角都是60°，这些条形区域产生两个等边三角形 abc 和 $a'b'c'$，都包含已知集合 S（图3-25）。从 S 的任何一点 P 向这些条形区域的六条边界线引垂线，即是向这

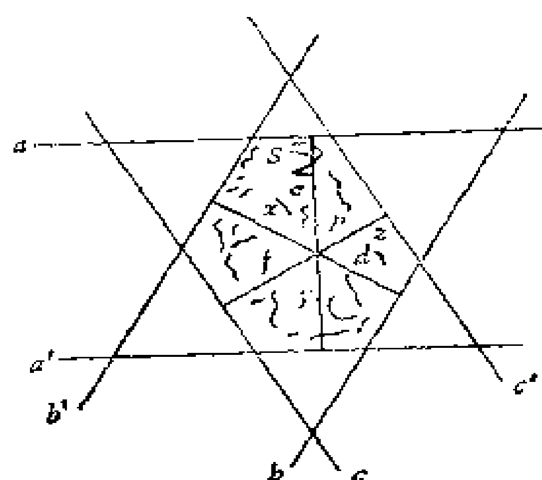


图 3-25

两个三角形的六条边引垂线．根据维维阿尼定理，这两个等边三角形中三条垂线之和分别等于它们的高 h 和 k：

$$d+e+f=h,$$

$$x+y+z=k.$$

可是，每个条形区域的两条边界线都是平行的，所以这六条垂线成对搭配成三个直线段，长度分别是 $x+d$，$y+e$ 和 $z+f$．由于最窄条形区域的宽度不大于 1，所以这三个线段中每一个的长度都不大于 1，于是所有这六条垂线构成的这三个线段长度之和不大于 3，这就得到

$$h+k\leqslant 3,$$

结果．h 和 k 这两个高度不能同时大于 3/2．这样，我们的两个等边三角形中至少有一个，其高度不能

大于 3/2，从而其边长不大于

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}=\sqrt{3}.$$

这就是所要的结论。

习　题

1. 角 ABC 和 CBD 每个都是 $60°$. 从角 ABC 中任何一点 P 分别向 AB, BC, BD 画垂线 PX, PY, PZ，证明 $PZ=PX+PY$（提示：维维阿尼定理）.

2. 给了平面上一点 P. 求作等边三角形 ABC，使得点 P 位于三角形内部，并且到 A，B，C 的距离各为已知数 x，y，z（提示：把作好的图形绕一个顶点旋转 $60°$）.

3. $ABCD$ 是平行四边形，其中没有一个角是 $60°$ 或 $120°$ ①. 在边 AD 和 DC 上各向外画等边三角形 ADE 和 DCF. 证明：BEF 是等边三角形.

4. D 是等边三角形 ABC 中 BC 边的中点. 在 BD 和 DC 上分别向外画等边三角形 BDE 和 DCF. 证明：AE 和 AF 把 BC 三等分.

5. 在 $\triangle ABC$ 的三边上各向外画任意三角形 ABD, BCE, CAF，使得 $\angle D+\angle E+\angle F=180°$. 证明这三个三角形的外接圆共点. 再证明这三个外

①是 $60°$ 或 $120°$ 的情形也对. ——译注.

接圆的圆心构成的三角形诸角等于 $\angle D, \angle E, \angle F$（提示：两圆的联心线垂直于它们的公共弦）．由此立得拿破仑定理．

6．在拿破仑定理中，即使三个等边三角形不是向外而是向内画出时，定理也成立．请证明．

7．在拿破仑定理中，如果等边三角形是向外画出的，那么它们的中心构成的等边三角形叫做"外"拿破仑三角形；如果是向内画出的，就叫做"内"拿破仑三角形．证明：外、内拿破仑三角形面积之差正好是原三角形的面积．

8．证明：外、内拿破仑三角形有同一个中心（见习题 7）．

9．在平面木板上画一个边长为$2/\sqrt{3}$的正六边形 H．把一系列半径为 1 的圆纸片放在木板上，使得每个圆纸片的圆心都在 H 内．证明：可以用三根大头针扎在三个点而把所有这些圆纸片都别在木板上（提示：这三点是某个边长为 1 的等边三角形的顶点）．

10．如果直径为 1 的点集 S 可以被边长为 $1/\sqrt{3}$ 的正六边形 H 盖住，证明：按照下述方法切掉 H 的两个错开的犄角后仍然能够盖住 S（图 3-26）：（1）画 H 的内切圆，让 O 表示圆心；（2）让 A 表示要切掉一角的 H 的那个顶点，OA 与圆的交点记为 P；（3）让圆在 P 处的切线与 H 相交在

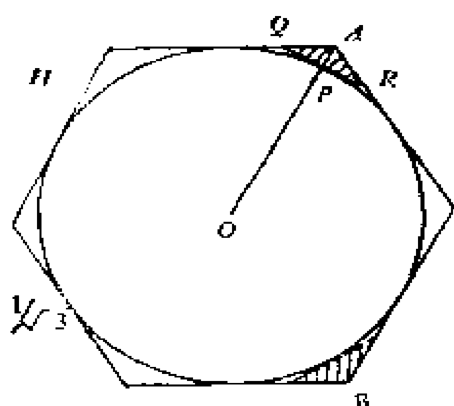


图 3-26

Q 和 R；(4) 切掉犄角 AQR；(5) 在顶点 B 处同法.(这个缺角的六边形是匈牙利数学家巴尔 (J. Pál) 在 1920 年提出来的，所以后来叫做直径为 1 的平面集合的巴尔通用覆盖).

11．在一个等边三角形内随机选取一点 P，从 P 向三角形三边作垂线．这三条垂线可以搭配构成一个三角形的概率是多少？

12．在任意凸四边形 $ABCD$ 各边上依次轮流向外及向内画等边三角形．证明：所得到的四个新的顶点确定一个平行四边形．

13．ABC 是等边三角形，从 AB 的一个内点到 AC 的一个内点画一条连续的线，不必是直线，把 $\triangle ABC$ 的面积平分为相等的两部分．要使这条线最短，试确定应该怎样画法，应该有什么形状．

14．AB 和 CD 是平行直线，与一条横截线分别相交于 E 和 F．角 FEB 和 EFD 的三等分线两两相交于 P 和 Q （靠近 EF 的两条三等分线交于 P，其余两条交于 Q)．作 PG 平行于 FQ，交 EQ 于 G；作 PH 平行于 EQ，交 FQ 于 H．把 GH 向两头延长，交 AB 于 J，交 CD 于 K，证明 G 和

H 是 JK 的三等分点.

参考文献及进一步的读物

〔1〕 Coxeter and Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, New York, New Mathematical Library Series, Vol. 19.

〔2〕 H. Meschkowski, *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*, Oliver and Boyd, 1966.

〔3〕 H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961.

四、果园问题

在这篇文章里我们要讨论一个饶有趣味的问题以及解决这个问题所涉及的那种美妙的数学.注意,坐标平面中两个坐标都是整数的那种点叫做格子点.

果园问题 有一个圆形的果园,圆心在原点,半径是 50 单位.在果园的每个格子点处种一棵树(所有的树都被看作是具有同一半径的垂直竖立的圆柱体).证明:如果树的半径超过 1/50 单位,那么从原点向任何方向看都不能看到果园以外的情景;但是,如果树的半径小于 $1/\sqrt{2501}$,就有一个

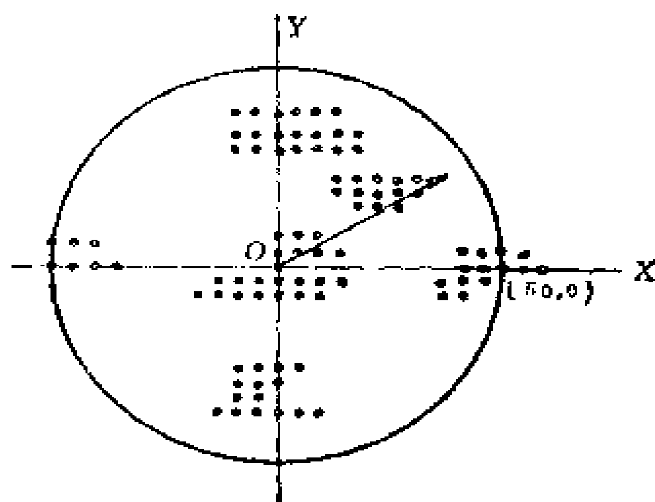


图 4-1

恰当的方向可以看到外面的情景.

问题的后一半是很容易的. 解决前一半则要靠希尔伯特 (Hilbert)的一位密友明柯夫斯基(Hermann Minkowski, 1864-1909)的一条有趣的定理. 为了证明这个定理, 我们先建立一个结果, 按照一位美国数学家的说法,叫做布里希费尔特(Blichfeldt) 引理.

布里希费尔特引理 假设有一个平面区域 R, 其面积大于 n 单位, n 是一个正整数,那么不论 R 是在平面上什么位置, 总是可以把它平移 (即是没有旋转的滑动) 到一个位置, 至少要盖住 $n+1$ 个格子点.

例如, 如果 R 的面积是 $8\frac{1}{4}$ 单位, 它就可以平移到一个位置至少盖住 9 个格子点.

如果 a 和 b 是整数, 方程为 $x=a$ 或 $y=b$ 的直线叫做 "格子线", 因为它们的交点是格子点. 让我们沿着每条格子线把平面剪开, 把它分成单位正方形, 从而区域 R 也被剪成若干块。假设区域 R 是涂成红色的,而平面的其余部分则未上色. 于是, 有些单位正方形可能完全是红的, 有些可能部分是红色, 而另一些则完全未上色.

让我们把凡是带上一点红色的所有正方形不加转动地、一个叠一个地堆在远处某个正方形 T 处.

现在考虑底面 T 的任何一点 K. 因为在正方形 T 上是一层一层堆起来的，所以每一层都有一个点盖住点 K：有时 K 出现在该层的红点下，有时在未上色的点下．在竖立堆在 K 的上方的点柱中，我们关心的是：有多少个点是红的．

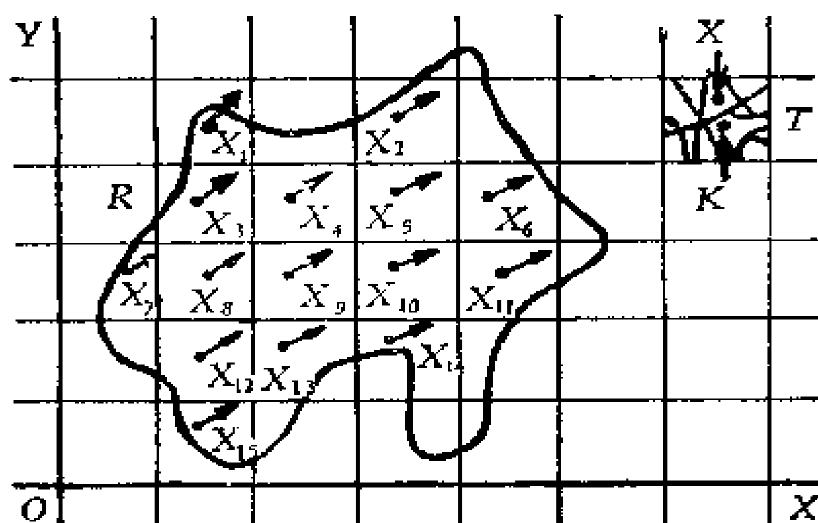


图 4-2

我们要证明的是，底面 T 中必定至少有一点被 $n+1$ 个不同的层以红点盖住（注意：这里所说的 n 满足条件：R 的面积大于 n 个单位）．为了证明这点，用反证法．假设竖立在 T 上任何一点处的那个点柱中，红点都不多于 n 个，即是说，底面上有些点处的点柱可能恰好含有 n 个红点，有些可能含得少些，但没有一个点柱含有 n 个以上的红点．

现在我们来计算那一堆正方形上红色颜料的总量．底面 T 的面积是单位正方形，即使竖立在 T 的

每一点处的点柱都含有最大个数 n 个红点，那也只能有可以把这个正方形涂上 n 层的红色颜料（T 的各点处上方的 n 个红点可以把它涂上 n 层），所以这一堆正方形上至多只能有可以涂 n 个单位面积的颜料．但是，区域 R 却是全部出现在这堆正方形里，它的面积是大于 n 单位的，所以这一堆正方形上又必定有可以涂 n 个以上的单位面积的颜料．这是一个矛盾．因此，T 上必有一点 X，至少被红点盖住 $n+1$ 次。

现在拿一根针垂直扎穿点 X 上所有各层，这就在每一层上标出一个点，由于上述，这种点至少落在 $n+1$ 层的红色部分中．让我们把这些红点记为 $X_1, X_2, \cdots, X_m$，这里 m 至少是 $n+1$．最后，把所有的正方形移回到平面上原来的位置，重新拼成 R．

既然各点 X_i 在其正方形中都出现在同样的相对位置上，所以 R 的任何平移，如果使一个 X_i 移动到一个格子点，也将使任何其他的 X_i 移动到一个格子点，但是各 X_i 都是红点，因而是 R 的点，它们至少有 $n+1$ 个．因此，这样的平移就把 R 变到一个至少盖住 $n+1$ 个格子点的位置上．（证毕）

布里希费尔特引理对于我们证明明柯夫斯基定理是很要紧的．可是它不是直接出面的，我们不过是利用 $n=1$ 时一个简单的推论．

推论　如果 R 是一个平面区域，其面积大于 1，

那么 R 必定有一对不同的点 A 和 B，其横标差与纵标差都是整数〔点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的横标差是 $x_2 - x_1$，纵标差是 $y_2 - y_1$〕。

注意，这里并不要求 A 与 B 本身是格子点，并且无论 R 是否含有格子点，这个推论都成立。

由布里希费尔特引理知，可以把 R 平移到一个位置，使得它至少有 $n+1=2$ 个点，例如 A 和 B，盖住格子点 A_1 和 B_1。由于格子点的坐标都是整数，所以任何两个格子点的横标差和纵标差也都是整数。可是，平移只改变直线的位置而不改变它的方向，所以也不会改变横标差和纵标差。因此，A 和 B 平移前的横标差和纵标差正好就是平移后的格子点 A_1 和 B_1 的横标差和纵标差，它们都是整数。（证毕）

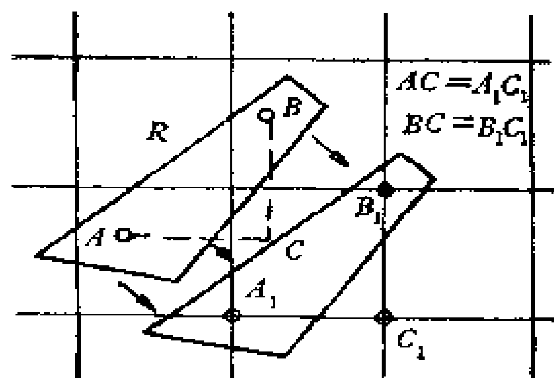


图 4-3

现在我们可以证明明柯夫斯基定理了。这个定理在直观上是显然的，可是逻辑上并不明显。

明柯夫斯基定理 一个平面凸区域关于原点对称，如果其面积大于 4，就含有一个异于原点的格

子点.

(一个凸集含有点 A 和 B，就含有整个线段 AB).

一个区域如果关于原点对称，那么当它含有点 P 时，它也含有由 P 关于原点反射而得的点 P'，即是使 P 经过原点在反面走同样距离而得的点. 如果 P 有坐标 (x, y)，则 P' 有坐标 $(-x, -y)$. 其次，注意，如果这个区域含有除原点以外的一个格子点，它必定也含有关于原点成对称的第二个格子点.

让 R 表示已知区域. 让我们把 R 向原点压缩，直到在每一方向都正好是原来的一半大，即是使 R 的每一点沿着与原点的联线向原点推移，直到与原点相距正好是原来的一半为止. 这个变换叫做中心为 O 比率为 $\frac{1}{2}$ 的膨胀. 假设 R 经过这个膨胀变成区域 R'. 既然膨胀把直线变成与之平行的线(如图4-5，让 A'，B' 表示 A，B 的像点，则 $A'B'$ 平行于 AB，线段 AB 的点 C 变成 $A'B'$ 的点 C')，所以膨胀并不改变图形中角的大小，因而也不改变图形的形状. 因

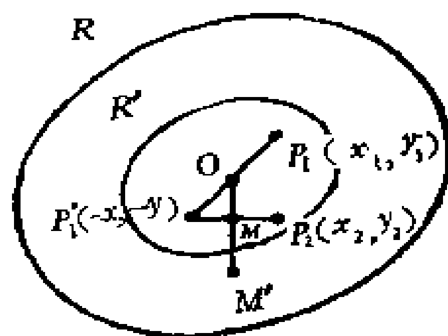


图 4-4

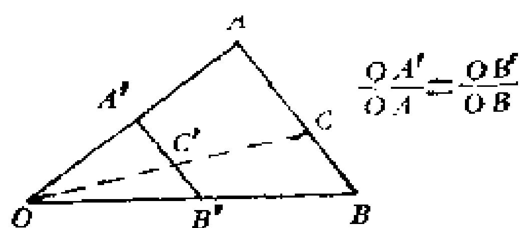


图 4-5

此，R' 与 R 有同样的形状，只是小一些．这就是说，R' 也是一个平面凸区域，关于原点对称．它之所以关于原点 O 对称，是因为 O 是R的对称中心，也是膨胀的中心．

但是 R' 的面积怎样呢？它在每个方向上的宽度正好是原来宽度的一半．如果 R 是一个矩形，那么 R' 也是一个矩形，长宽均为原有的一半．不管怎样，在任何情形下，把一个平面图形的线度按比率 1:2 缩小时，面积就按比率 $(1:2)^2=1:4$ 缩小．由于 R 当初的面积大于 4，所以我们断定 R' 的面积仍然大于 1．于是我们可以应用布里希费尔特引理的推论了．

因此，R' 含有两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，其横标差 x_2-x_1 和纵标差 y_2-y_1 都是整数．因为原点 O 是 R' 的中心，所以关于原点与 P_1 成对称的点 $P'_1(-x_1,-y_1)$ 也必定在 R' 中．于是 P'_1 和 P_2 是属于 R' 的两点．

现在利用 R' 是凸集这个事实．按照定义，这就使我们确定，线段 P'_1P_2 的每一点都属于 R'．特别是，线段的中点 $M\left(\frac{x_2-x_1}{2},\ \frac{y_2-y_1}{2}\right)$ 属

于 R'.

现在把我们的膨胀变换逆转回去，即是对 R' 施以中心为 O、比率为 2:1 的膨胀．这就使 R 伸展回到它原来的形态，即伸回为 R．在这个膨胀下，R' 的每个点移动到与原点相距为原来的两倍的点．于是点 M 变成点 $M'(x_2-x_1, y_2-y_1)$．因此 M' 是 R 的一点．但是，据布里希费尔特引理的推论，M' 是一个格子点．此外 M' 不是原点，否则 P_1 和 P_2 将会重合，这是和布里希费尔特引理的推论矛盾的，因为后者断定它们是不同的两点．（证毕）

现在让我们着手解决果园问题的头一半．我们希望证明：如果树的半径 r 超过 $\frac{1}{50}$ 单位，就没有任何途径可以从原点看到果园以外．让 AOB 表示果园的任一直径，假设树的半径是 $\frac{1}{50}+q$．注意，如果 r 大于 $\frac{1}{2}$，那些树就会互相往里长，所以，

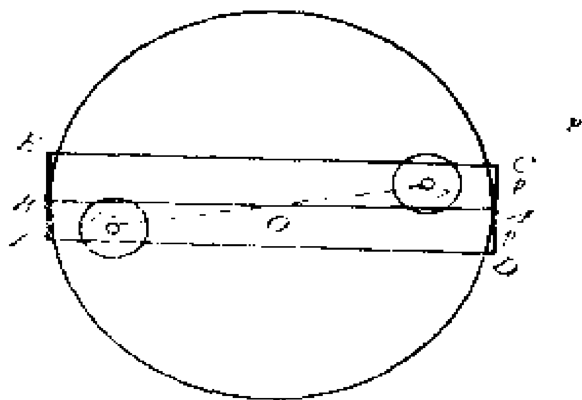


图 4-6

既然 q 是正数，它就不是一个很大的数．现在让 p 表示任何一个大于 $\frac{1}{50}$ 而小于 r 的数，例如 $\frac{1}{50}+\frac{1}{2}q$．在果园的边界上 A 和 B 处作切线，沿切线在两个方向上截取与 A 和 B 相距为 p 的点 C，D，E，F，这就确定了一个矩形 $EFDC$，其中心是原点 O（图中把这个矩形的尺寸放大了）．矩形的长是 $FD=AB=100$，宽是 $2p$，所以面积是 $200p$．因为 p 大于 $\frac{1}{50}$，所以这个面积大于 4．由于 $EFDC$ 是一个平面凸区域，关于原点成对称，所以据明柯夫斯基定理，我们的矩形含有一个异于的原点格子点 T．在点 T 种的树具有半径 r，大于 $p=CA$，所以在 T 处的这棵树之大，足以和直线 OA 相交，从而堵住在这个方向上的视线．按照对称性，这个矩形也含有一个对称的格子点 T'，在该处所种的树堵住了沿 OB 的视线．这样一来，我们似乎可以断定不可能从原点往外看了．不过，在我们的论证中还有一个难点要解决．（你知道是什么吗？）

这个矩形的每个角上都有很小一部分伸出果园以外．如果格子点 T 刚巧落在矩形的这样一部分里，则在该点处并未种树堵住我们的视线．于是我们需要证明：T 不落在 $EFDC$ 在果园以外的任何一部分中．我们间接进行如下：对于矩形的任何一点而言，

与原点的最大距离是对角线之半 $OC=\sqrt{50^2+p^2}$．由于 $p<1$，所以 $OT\leqslant OC<\sqrt{2501}$．可是，当 T 在果园以外时，我们有 $OT>50$．因此

$$2500<OT^2<2501.$$

如果 T 是格子点 (x,y)，则 $OT^2=x^2+y^2$，这里 x 和 y 都是整数，所以 OT^2 是整数．但是在 2500 和 2501 之间根本没有整数，因而 T 不可能落在果园之外．

在结束本文之前，让我们证明：如果树的半径减少到小于 $1/\sqrt{2501}$，则可以沿着把原点连到点 $N(50,1)$ 的直线看到果园以外的情景．线段 ON 的长度是 $\sqrt{2501}$．由于格子点是成排成列地出现的，所以容易看出，果园中最靠近直线 ON 的格子点是点 M

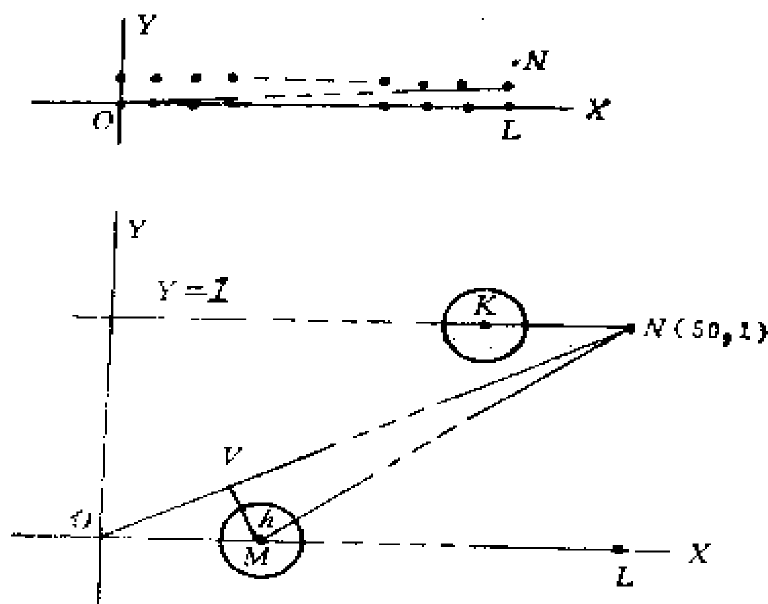


图 4 7

(1,0) 以及同样接近的点 K (49,1). 让 L 表示点 (50,0).

现在 $\triangle OMN$ 的面积可以用两种办法求得. 首先, 这个面积是 $\frac{1}{2}\cdot OM\cdot LN$, 即是 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. 以 ON 为底、以 $h=MV$ 为高, 我们也得到 $\frac{1}{2}\cdot ON\cdot h$, 即是 $\frac{1}{2}h\sqrt{2501}$. 从而, 我们有

$$\frac{1}{2}h\sqrt{2501}=\frac{1}{2},$$

即

$$h=\frac{1}{\sqrt{2501}}.$$

于是 h 大于树的半径, 所以在 M 处所种的树并未大到足以碰到直线 ON 的程度. 同样, 在点 K 所种的树亦然. 既然最靠近的树都不碰到 ON, 所以在这个方向上没有任何树能挡住我们的视线.

练　　习

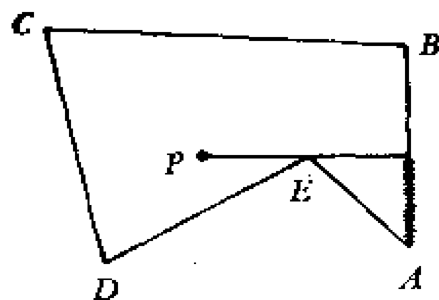


图 4-8

1. 图 4-8 表示多边形内一点 P, 从这点看不到边 AB 的一部分以及整个 AE. 求作一多边形 G, 使得从其中一点 P 不能完全看到 G

的任何一条边．再作一多边形 H，使得从它外面一点 P 不能完全看到 H 的任何一条边．

2．已知圆 O 和圆外一点 P，求作一直线 PQR（如果可能的话），使得 Q 和 R 在圆周上，且 Q 为 PR 的中点（提示：考虑中心为 P、比率为 $\frac{1}{2}$ 的膨胀）．

3．在一个方形网格中，证明：(a) 无论联结哪三个格子点，都不能得到等边三角形；(b) 无论联接哪五个格子点，都不能得到正五边形．

4．证明：面积为 1 的凸区域可以被面积不大于 2 的一个平行四边形盖住．

5．如图 4-9，圆 C_0 的半径 $R_0=1$ 公里，在 Z 处切于直线 L．在 C_0 的右边画圆 C_1，半径 $R_1=1$ 毫米，切于 C_0 和 L．在右边朝外作一系列的圆 C_i，使得每个 C_i 都切于 C_0 和 L 且与前一个圆 C_{i-1} 相切．这些圆逐渐变大，以致最后无法再继续画下去．试问：最多可以画多少个这样的圆？

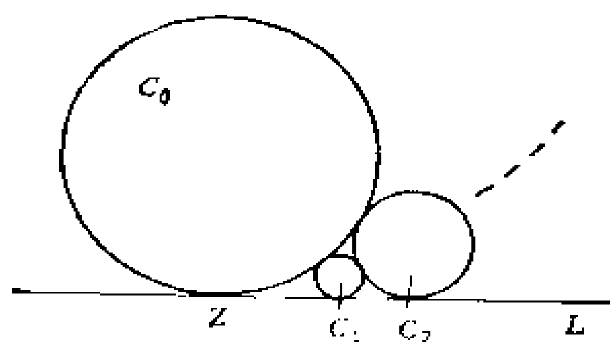


图 4-9

6. 查阅希尔倍特的《Geometry and the Imagination》(几何与想象力)一书的 43 和 44 页，应用明柯夫斯基定理来解决有理数列逼近实数的问题.

7. 施尼勒曼(L. G. Schnirelman 俄国人，1905—1935)证明了一条闭凸曲线上存在四个点，成为一个正方形的顶点. 利用这个结果来证明：每一条周长小于 4 的凸曲线都可以安放在坐标平面上，使得它不含有任何格子点.

参考文献及进一步的读物

Yaglom and Yaglom, Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol Ⅱ, Holden-Day, San Francisco, 1967.

五、△曲线

1．引言 假如我们想知道一个平面图形 Q 在直线 m 方向上的宽度 w，我们就要沿 m 的垂线方向作包含图形 Q 的最窄的条状区域，然后去度量这个区域的宽度．这个最小的条状区域的每一条边叫做图形 Q 的支撑线，所以这两条边就构成 Q 的一对平行的支撑线．如果 Q 没有边界（例如圆的内点集），那么支撑线实际上同 Q 不相交．以下，我们认为所有的图形都有边界，所以支撑线的确至少要经过 Q 的一个点；如果不算支撑线上的交点，则整个图形 Q 都在支撑线的同一侧．

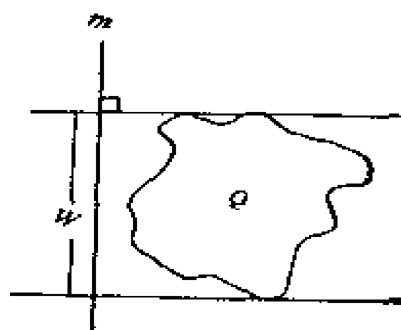


图 5-1

如果图形 Q 在所有方向上的宽度都一样，就叫做常宽曲线或等宽曲线①．圆周显然是常宽曲线．可是，别的例子却不是可以信手拈来的．其中一个例

① 这里的曲线当然是指Q的周界，而不是指区域．——译注．

子就是所谓热洛（Reuleaux）三角形，作法如下：以等边三角形的三个顶点为圆心，以边长为半径画弧．这个图形的一对平行支撑线中总是有一条通过一个角点，而另一条则与角点所对的弧相切，所以宽度总是等于半径．

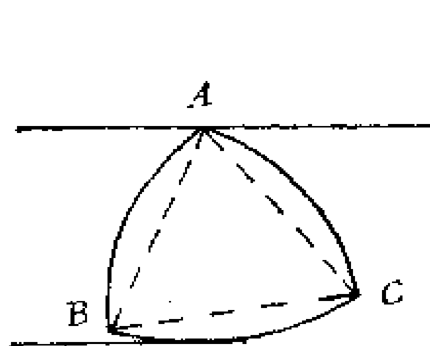


图 5-2

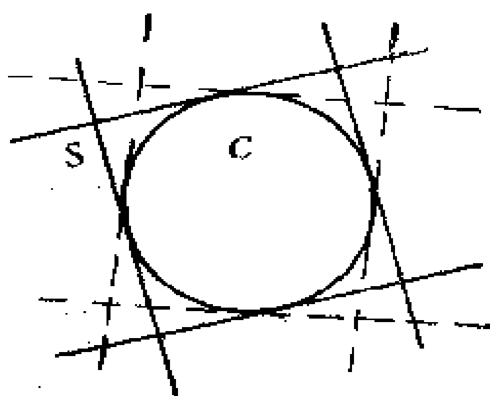


图 5-3

常宽曲线种类形形色色，形状变化无穷．如果对常宽曲线 C 作两对互相垂直的平行支撑线，那么 C 就被包围在一个正方形中；不论支撑线的方向如何，这种正方形都有同样的大小．因此，如果让 C 保持固定，就可以使一个正方形 S 绕着它连续旋转，并且正方形的四条边总是和 C 保持接触．由于运动的相对性，我们也可以反过来让 C 在 S 内旋转．于是我们可以把常宽曲线想象成可以在某个正方形 S 内转动，并且总是与 S 的各边保持接触的曲线．常宽曲线有许多有趣的性质，其中最令人惊奇的，是一条叫做巴比耶（Barbier）定理的性质：

常宽为 h 的所有形形色色的曲线都有相同的周长 πh.

雅格洛姆和波尔将斯基的书《凸形》〔1〕对于这类曲线做了极好的描述.

不过，在这篇短文里，我们所关心的却是另外一类曲线，即所谓 Δ 曲线（delta 曲线）. 和常宽曲线不同的是，这种曲线可以在等边三角形（而不是在正方形）内连续转动.

2. Δ **曲线** 圆周仍然是唯一立即就能想到的 Δ 曲线. 可是，Δ 曲线的形状仍然是千变万化的. 除了圆周以外，最简单的 Δ 曲线是一种透镜式的曲线，叫做 Δ 两角形.

与高为 h 的等边三角形相应的 Δ 两角形的作法如下：以半径 h 画圆，截取长度为 h 的弧 AB(这条弦和圆心到 A 与 B 的半径一起构成一个等边三角形)，然后使劣弧 AB 对弦 AB 作反射，就得到所

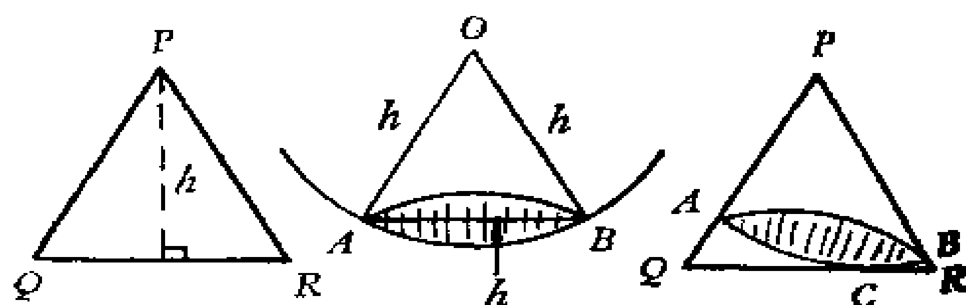


图 5-4

要的 Δ 两角形. 一般说来，Δ 两角形与等边三角形

的一边接触，接触点是顶点 A，B 以及弧上的一点 C.〔可是，当 A 位于三角形的顶点时，C 就和 A（或 B）重合.〕图 5–5 是说明Δ两角形怎样在三角形内回转的. 从图 5–5（a）的情形出发，想象Δ两角形沿底边转动（就象一个向上翘起来的碟子在桌面上朝下方滚动一样）. 在运动过程中，弧 AB 的每个点 C 都会成为与底边接触的点. 当转动发生时，顶点 A 和 B 经过的直线路径不过就是描出了三角形另外两边的一部分.

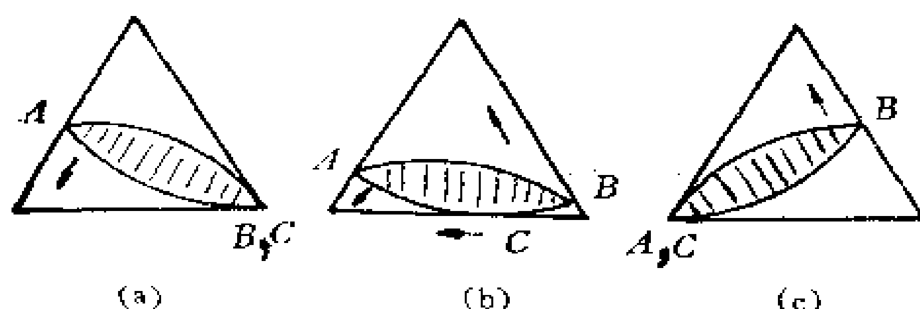


图 5-5

图 5–6 表示 C 点沿着三角形另外两边移动的情形，更加完整地描绘出Δ两角形回转的全过程.

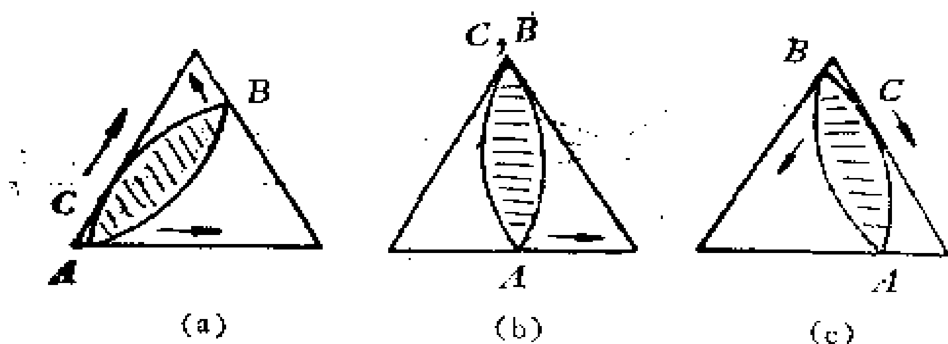


图 5-6

有点令人吃惊的是，点 C 沿着所有三条边走了一圈，而 Δ 两角形只是在三角形内转动了半圈。）现在让我们来证明 Δ 两角形是 Δ 曲线，因为这个事实远远不是显而易见的。

注意，对于平面上的任何有限图形，都可以作它的外接等边三角形，只要在适当的方向上对这个图形引三条直线即可（彼此相交成 120° 角）。一条边的方向一旦确定，另外两条边的方向也就确定了。但是，第一条边可以随意放在你喜欢的任何方向上，所以任何有限的平面图形都有一族外接等边三角形，连续分布在所有方向上。对于我们的 Δ 两角形说来，我们要证明的是：它的所有外接等边三角形大小相同。从而，Δ 两角形可以在任何一个外接等边三角形内连续转动（由于运动的相对性）。要证明这些三角形大小相同，只须证明三角形的高总是 h，即 Δ 两角形的弦 AB 之长即可。让 PQR 表示任何一个外接等边三角形，PS 表示从 P 点所引的高。我们来证明：$PS = h$。

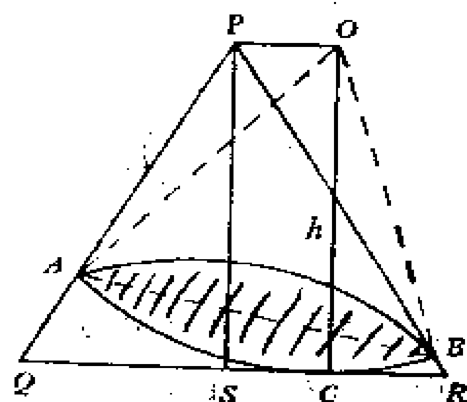


图 5-7

让 QR 和 Δ 两角形的弧在 C 处相交，O 表示弧 ACB 的圆心。因为 QCR 是切

线，所以OC是QR的垂线，它的长度h等于半径．已知ΔAOB是等边三角形，所以$\angle AOB=60^\circ=\angle APB$，从而$APOB$是圆内接四边形．在$P$和$B$处的对角互补．可是，在$B$处的角$\angle ABO=60^\circ$（在等边三角形$ABO$中），所以$\angle APO=120^\circ$．从而，

$$\angle Q+\angle APO=60^\circ+120^\circ=180^\circ,$$

这就是说PO平行于QR．因此，$POCS$是矩形，这就给出高度$PS=OC=h$，如所求证．

一个图形的外接等边三角形通常是随着方向变化而变化的．图形F的外接等边三角形如果有一条高线出现在已知方向AB上，那么这个三角形的高h就叫做图形F在方向AB上的“高度”．因此，Δ曲线就是常高曲线．

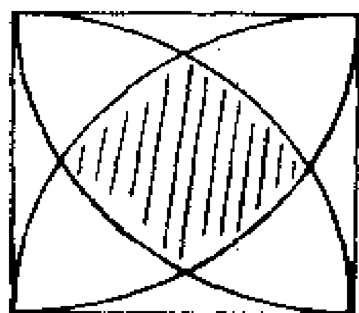


图 5-8

在正方形中以顶点为圆心、边长为半径画四个四分之一圆，它们的公共区域所确定的曲线是Δ曲线的另一个例子．

Δ曲线有许多迷人的性质，我们只提两个：对于Δ曲线在等边三角形内转动的每个位置，三角形各边在接触点处的垂线共点（于“瞬时旋转中心”）；其次，高度为h的所有形形色色的Δ曲线都有同样的

周长 $\frac{2}{3}\pi h$（Δ 曲线的巴比耶定理）.

3. 有关的曲线 任何平面图形 F 都有一族外接矩形，连续分布在所有方向上. 如果所有这些矩形都是大小相同的正方形，F 就是常宽曲线. 如果放松这个定义，只要求所有的矩形大小相同，而不管它们是不是正方形，我们就得到另一类有趣的曲线. 常宽曲线当然包括在这曲类线中，但除此以外也还有另外一些曲线. 所谓"大小相同"，我们是指周长相同，而不是面积相同.

在一个正方形中，以一对相对顶点为圆心、以边长为半径画两个四分之一圆，它们的公共透镜式区域所确定的曲线是这类曲线中最简单的非常宽曲线. 让我们来证明：这条曲线的确属于我们这类新的曲线.

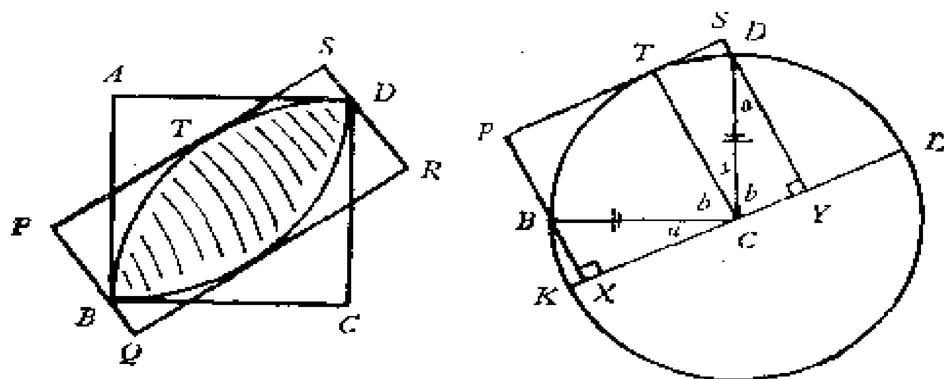


图 5-9

下面的简单证明属于安大略教育部门的莱维(J. Levitt). 让 $ABCD$ 表示定义中的正方形，

$PQRS$ 表示任意的外接矩形．正方形的顶点 B 和 D 是我们的曲线和外接矩形的两个接触点，把矩形的周长分成两半．要得到我们的结果，只须证明：半周长 $BP+PS+SD$ 总是等于正方形 $ABCD$ 两边之和．

假设 PS 同所说的曲线在 T 处接触，把弧 BTD 补充成一个圆，圆心是顶点 C．让 KCL 表示垂直于 TC 的直径，PB 和 SD 延长后和这条直径相交在 X 和 Y．容易看出，三角形 BXC 和 CDY 全等，所以 $BX=CY, DY=XC$．由于 $PX=TC=SY$，我们有

$$\begin{aligned} PB+SD &= (PX-BX)+(SY-DY) \\ &= (PX+SY)-(BX+DY) \\ &= 2TC-(CY+XC) \\ &= 2TC-XY=2TC-PS. \end{aligned}$$

两端加上 PS，我们看出，矩形的半周长正好是 $2TC$，即圆弧半径的两倍，如所求证．

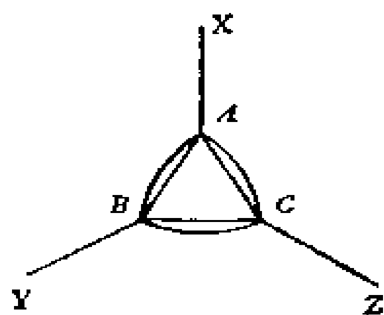


图 5-10

这类曲线中还有一条曲线，也不是常宽曲线，是从等边三角形 ABC 得到的，作法如下：把三角形的三条高线向外延长到点 X, Y, Z，使得 $AX=BY=CZ=$ 三角形的边

长；以 X,Y,Z 为圆心画弧，把两个相对顶点连结起来．这样就得到一条热洛三角形式的曲线，它的所有外接矩形都有同样的周长．

这些曲线就讲到这里了，只提一下，外接矩形具有常值周长 $4h$ 的所有形形色色的曲线都有同样的周长 πh（巴比耶定理推广到整个这类曲线上）．

4．逆问题 最后，让我们把问题的提法反过来，考虑这样的曲线，使得等边三角形可以在其中连续转动并保持同曲线接触．这类曲线中，除了圆是显而易见的一个以外，别的只知道一个，那就是两个等圆，每一个都通过另一个的圆心，它们的公共区域所确定的曲线．让 X 和 Y 表示两个圆心，A

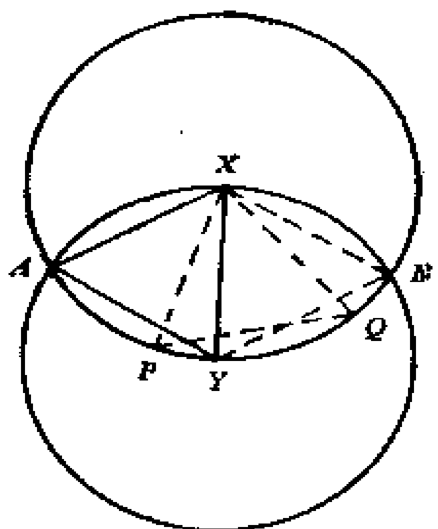


图 5-11

和 B 表示两个交点．于是，三角形 AXY，BXY 显然都是等边三角形，并且对于弧 AYB 上任何两点 P 和 Q，如果 PQ 之长等于半径，则三角形 PQX 也是等边三角形．因此，$\triangle AXY$ 可以绕着点 X 摆动到 $\triangle XYB$ 的位置，然后又可以绕着中心 Y（顶点 A 的新位置）转回到它原来的位置，结果旋转了三分之一圈．重复这个过程，可以使这个三角形在

曲线内随意转动.

练　　习

1. 假设等边三角形 ABC 内有一个 Δ 两角形，接触点是 U, V, W. 证明：$\triangle ABC$ 的三边在 U, V, W 处的三条垂线共点.（提示：假设 U, V, W 分别在边 BC, AC, AB 上；让 V 和 W 处的垂线相交在 P. 于是，以 AP 为直径的圆通过 V 和 W. 证明这个圆也通过 Δ 两角形的边 WUV 的圆心 O. 于是 $\triangle OVW$ 是等边三角形. 证明：UP 垂直于 BC.）

2. 让高度为 h 的等边三角形 ABC 和其中的一条 Δ 曲线的接触点是 U, V, W. 在 VW 上朝 A 作一个等边三角形 VWX. 证明：$XU = h$.（提示：画圆通过 XWV. 利用练习 1，并且假定练习 1 的性质已经推广到任何 Δ 曲线，不仅是对 Δ 两角形成立.）

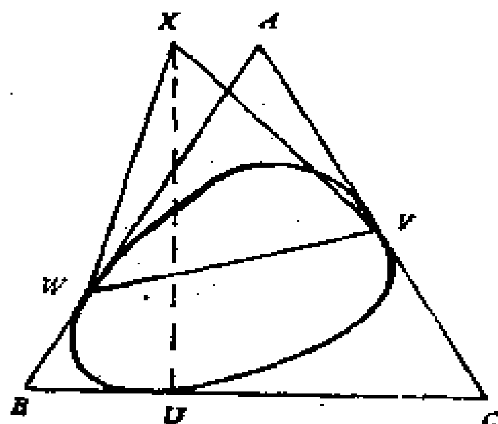


图 5-12

3 如图 5-12，让等边三角形 ABC 的三条高线延长到点 X, Y, Z，使得 AX, BY, CZ 都等于边长. 以 X, Y, Z 为圆心画弧，分别把 B 和

C, A 和 C, A 和 B 连结起来. 证明：这样得到的曲线三角形 ABC 的所有外接矩形都有同样的周长.

4. 证明：正方形的任何外接矩形都是正方形.

5. 在直角三角形的各边上向外作半圆. 作这个图形的外接矩形，使得它的各边平行于三角形的直角边. 证明：这个矩形是正方形.

6. 证明：对于面积为 1 的已知凸形 F，总是可以作外接平行四边形，其面积小于或等于 2.

参考文献及进一步的读物

〔1〕 Yaglom and Boltyanski, Convex Figures, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1961

六、组合分析的重要性

在这一章里，我们将考虑介乎算术与几何之间的种种短小的论题．先讲几个关于数的奇偶性（是奇数还是偶数的性质）问题，然后再讲亚当斯(Clifford W. Adams) 的那个不平常的故事．

1．奇偶性

（1）正整数的因子个数 下面这张简表对正整数 n 的几个值列举出 n 的因子个数．我们用 $d(n)$ 表示这个数．例如，$d(4)$ 的值是 3，因为 4 有三个因子，即是 1，2 和 4．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	……
$d(n)$	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6	……

把 $d(n)$ 的值察看一遍，就会感到 $d(n)$ 往往取偶数值：照上表所列诸值来看，使 $d(n)$ 为奇数的 n 值不过是 $n=1,4,9,16$．这就事先暗示了下面这个出人意外的定理：

正整数 n 的因子个数 $d(n)$ 为奇数的充要条件是：n 是一个完全平方．

证明很简单，只须注意，n 的因子通常是成双成

对的．因为，如果 $ab=n$，那么 a 和 b 都是 n 的因子．由于 $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n$，所以 $a<\sqrt{n}$ 时必有 $b>\sqrt{n}$．因此，n 的因子中小于 $\sqrt{n}$ 的同大于 $\sqrt{n}$ 的是成对出现的．一般说来，这些配对也就是 n 的全部因子，所以 $d(n)$ 是偶数．如果 n 是平方数，并且只有在这种情况下，$\sqrt{n}$ 才是一个整数，因而产生一个额外的因子，使 $d(n)$ 成为奇数．

(2) **葛摩利定理** 其次，我们考虑一个令人费解的问题，牵扯到象棋盘．不过，欣赏这个问题倒用不着什么象棋知识．我们按照老规矩来介绍这个问题．

假设我们有一个平常的 8×8 的棋盘和 32 张大小为 2×1 的骨牌．这些骨牌显然可以排列在棋盘上，把它完全盖住．现在切掉棋盘的两个对角正方形，扔掉一张骨牌．我们的问题就是：确定剩下的 31 张骨牌是否能够排列在缩小的棋盘上正好把它盖住(见图6-1)．

答案是：用 31 张骨牌把缩小的棋盘盖住，这是做不到的．整个棋盘有 32 个黑的和 32 个白的正方形，注意对角上的两个正方形颜色相同，比如说是黑的，所以缩小的棋盘有 32 个白的正方形，但只有 30 个黑的正方形．既然每张骨牌都盖住一对相邻的正方形，其中必定一个是黑的，一个是白的，所以 31 张骨牌只能盖住 31 个白正方形，而不能盖住所要求

的 32 个白正方形．因此，盖住缩小的棋盘是不可能的．

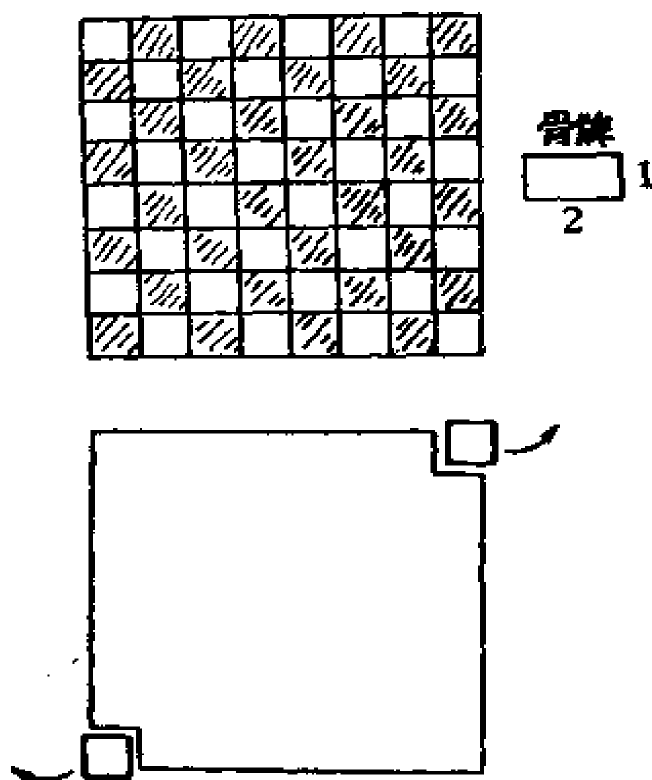


图 6-1

提这个问题的人故弄玄虚，去掉一双对角正方形来缩小棋盘，而实际上他想做的事，不过是扔掉两个颜色相同的正方形罢了．当然，从棋盘上任何位置除掉两个颜色相同的正方形，所得到的问题仍然是不可能的．这里把奇偶性的问题掩盖起来了①．

①这就是说，如果把问题提成下面的形式，答案就显而易见了：把从1开始的 62 个正整数，各放在缩小的棋盘的正方形上，白的放奇数，黑的放偶数，是否可能？——译注．

我们的主要问题是：如果在棋盘上除掉一个白正方形和一个黑正方形，是否可以盖住？不难看出，至少有时候是可以盖住的（例如，把相邻的两个正方形去掉）．不过，我们仍然相当赞赏地接受下面这个定理，它是国际商业机器公司（IBM）的一位数学家葛摩利（Ralph Gomory）提出的．

葛摩利定理　从平常的棋盘上任何位置除掉一个白正方形和一个黑正方形后，缩小的棋盘总是可以被 31 张大小为 2×1 的骨牌恰好盖满．

证　把一柄三齿叉和一柄四齿叉放在棋盘上，如图 6-2 所示．这个图形的迷宫式的效果就是要把棋盘上的正方形排成循环的次序，使得可以绕着这座迷宫走过所有的正方形而在开始的地方结束．

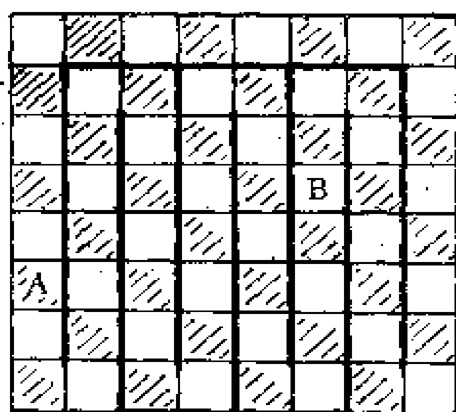


图 6-2

今设某个黑正方形 A 和某个白正方形 B 被除去．注意，按照图中循环次序，这些正方形的颜色交替变换．结果，沿着迷宫的路径，位于一个黑正方形和一个白正方形之间的正方形个数总是偶数．因此，在 A 和 B 之间恰好有足够的地方可以容纳整数张骨牌，只要我们能够绕着迷宫里那条歪歪扭扭的路径把骨牌搭配好就行了．

唯一可能出问题的地方是在拐弯处. 但是，因为骨牌可以转个身在棋盘上来回挪动，所以我们总可以绕过一个拐角而不留下任何空隙. 因此，沿着迷宫形从 A 到 B 的两条路径走下去，我们就能够照着要求把缩小的棋盘盖满.

（3）**菱形十二面体** 第二章中开始讲迪拉克定理时曾经简略地提到，1857 年爱尔兰人哈密尔顿爵士发明了沿着一个图的诸棱从顶点到顶点旅行的游戏. 注意，游戏的目的是要找出由棱组成的一条道路，通过每个顶点正好一次. 实际上，他提出的这个游戏中，棱和顶点是一个正十二面体的棱和顶点，这个游戏有很多解答. 这一节里我们将利用一个简单的奇偶性论断来证明：在菱形十二面体的表面上没有哈密尔顿道路. 这个证明属于一位杰出的加拿大几何学家柯克斯特(H. S. M. Coxeter).

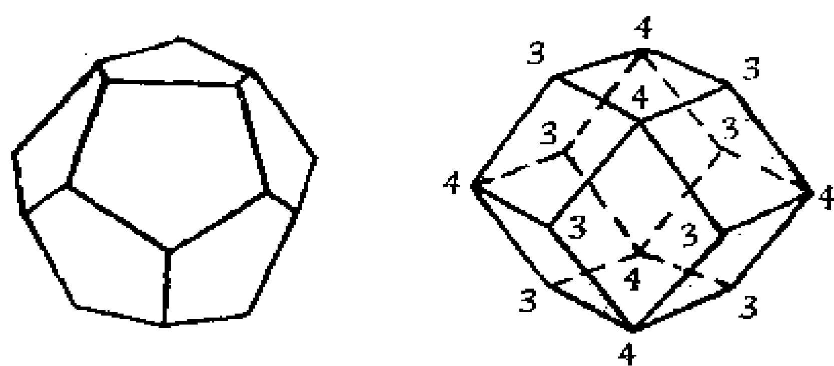


图 6-3

注意，每个顶点的价或者是 4 或者是 3（顶点的价就是通过这个顶点的棱的条数）. 其次，每个 3

价顶点都被 4 价顶点所包围，即是，3 价顶点的三条棱中每一条都通向一个 4 价顶点. 反之，每个 4 价顶点也都被 3 价顶点包围，所以，一条哈密尔顿道路必须依次轮流通过 3 价顶点和 4 价顶点. 要把所有 14 个顶点一一通过，哈密尔顿道路必须含有 3 价顶点和 4 价顶点各 7 个. 可是，4 价顶点只有 6 个，所以哈密尔顿道路是不可能存在的.

(4) **狱吏问题** 按照部分大赦条款，一个狱吏 n 次通过一排本来是锁着的 n 间牢房如下：

第一次通过时，他转动每一把锁（即是把锁全都打开）；第二次通过时，从第二间牢房开始，每隔一把锁转动一次[①]；第三次通过时，从第 3 间牢房开始，每隔两把锁转动一次；……；第 k 次通过时，从第 k 间牢房开始，每隔 $k-1$ 把锁转动一次；……第 n 次通过时，从第 n 间牢房开始，每隔 $n-1$ 把锁转动一次. 通过 n 次之后，哪些牢房的锁仍然是打开的？

考察一下头十多间牢房的结果，很容易猜到答案，然后想法证明它. 不过，我们可以通过下述简单处理来解决问题. 考虑第 m 间牢房，开头它是锁上的；第一次通过时锁被转动了一次；如果 m 被 2 除尽，第二次通过时也被转动了一次；如果 m 被 3

①注意，原来打开的锁这时又锁上了.——译注.

除尽，第三次过时又被转动了一次，等等．即是，m 每有一个因子，锁就被转动一次．要使这间牢房的锁最终是打开的，它就必须转动奇数次，所以充分必要条件是：m 有奇数个因子，即 m 是完全平方数．

2．亚当斯的故事 数学游戏很久以来一直受到职业数学家和业余数学爱好者的普遍注意．幻方这个主题源远流长，有很多惊人的结果和精巧的证明．大家知道，在幻方里，每行、每列以及每条对角线上各数加起来都是同一个和数．1910 年，亚当斯想试试看他是否能够找到一个"幻六边形"，即是 1，2，3，4，5，6，7 这些数的一种排法，使得其中六个把一个围在当中，而每条线上的数加起来是同一个和数．从图 6-4 可见，这样的排法根本不可能：如果 $x+y$ 要和 $x+z$ 一样，就必须有 $y=z$；可是每个数都只能使用一次．所以他决定试一下两层六边形：在图 6-4 的外围再放上 12 个六边形，用 1，2，3，…，19 这些数．

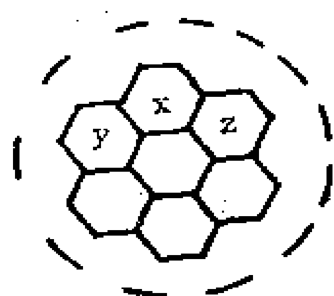


图 6-4

亚当斯是雷定铁路公司的职员，他是业余搞他的六边形的．他试了又试，但是劳而无功．他甚至把 19 块六边形瓦片从 1 到 19 编上号，以便他能更容易地进行研究．过了些时候

他退休了，所以他可以花更多的时间仔细琢磨他的六边形了．他不断地试，可是毫无结果，弄得人垂头丧气，精疲力尽．最后，他病了，不得不住进医院，自然，他也随身带上他那些编了号的瓦片．

有一天，他正处于手术后的恢复阶段，玩着他的瓦片呢，嗨，你瞧，他真的发现了一个幻六边形……那是在1957年！为了不致忘掉这个奇妙的排法，他把它抄在一张纸片上．但是，当他出院的时候，不知道怎么搞的，一阵忙乱把那纸片给弄丢了．

于是，他想要凭自己的力量把那玩艺儿重新找出来．他试了又试，可是徒劳无益．然而他并不灰心丧气．他继续又试了五年，直到1962年，你猜怎么着？他把那张纸找到了！图6-5就是他的幻六边形，每条线上各数之和都是38．

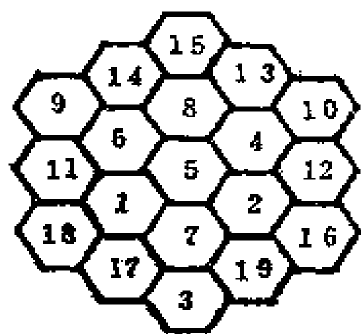


图 6-5

这样的发现自然不应该默默无闻．亚当斯把他的六边形寄给《科学美国人》(Scientific American)的著名专栏作家伽德纳(Martin Gardner)．伽德纳知道有880种不同的方式把1,2,3,…,16这些数排成4×4幻方，他以为亚当斯的六边形就是许多幻方中的一种．可是，他在数学文献上找不到任

何地方提到这样一件事，所以他把这件事通知洛杉矶的一位热心出题的数学游戏爱好者崔格（Charles W. Trigg）. 崔格就去搞这个问题，他能够证明：所有无限多种六边形排法中，不论有多少层，不论用多长的数例 1,2,3,…，唯一的一个幻六边形就是亚当斯的六边形！这个事实的一个杰出的证明属于阿莱尔（Frank Allaire），他是 1969 年搞出来的，当时他是滑铁卢大学的二年级学生．我不熟悉崔格的论证，但是我可以相信，如果不算阿莱尔使用了计算机，那会是一件同样精巧的推理作品．阿莱尔的论证如下．

让 n 表示围绕中心核的格子的层数或圈数．$n=0$ 时，我们只有中心核，它显然具有幻性．$n>0$ 时，我们来证明：如果某个排法具有幻性，必定有 $n=2$．首先注意（见图 6-6），每圈都成正六边形．每个顶点处各有一个格子，第 n 圈的每条边的顶点之间各有 $n-1$ 个格子（$n>0$），所以每一圈都比前一圈多六个格子．因此，在一个 n 圈排列中格子数的总和是

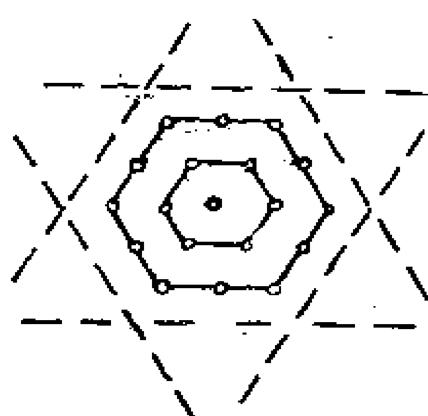


图 6-6

$$1+(6+12+\cdots\text{第 } n \text{ 项})=1+(6+12+\cdots+6n)$$

$$=1+6(1+2\cdots+n)=1+6\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=3n^2+3n+1.$$

其次，我们注意，这些六边形圈都是同心的，相应的边平行，给出常值和数的格子"线"就在这三个方向上，每个方向上都有 $2n+1$ 条这样的"线"(通过中心的一条线以及每一侧 n 圈上的 n 条线).

假设沿着一条线的常值和数是 s. 沿着某固定方向上的 $2n+1$ 条线使各数相加，这样得到的 $2n+1$ 个 s 总起来就表示这个排法中所有格子里诸数之和. 于是，所有 $3n^2+3n+1$ 个格子里诸数之和是 $(2n+1)s$. 但是，这些数是 $1,2,3,\cdots,3n^2+3n+1$，其和为 $(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)/2$.

从而

$$(2n+1)s=\frac{(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)}{2},$$

或

$$2(2n+1)s=(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2).$$

因此，

$$2n+1 \mid (3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2).$$

由于 $3n^2+3n+1=(2n+1)(n+1)+n^2$， $3n^2+3n+2=(2n+1)(n+1)+n^2+1$，相乘给出 $2n+1$ 的倍数再加上 $n^2(n^2+1)$ 这一项，所以

$$2n+1 \mid n^2(n^2+1).$$

此外，出乎意外的是，$2n+1$ 和 n^2 这两个数总是互素的．要证明这一点，让 d 表示它们的最大公约数．于是，

$$d \mid 2n+1 \qquad\qquad 且 \quad d \mid n^2.$$

从而

$$d \mid (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1,$$

$$d \mid 2(2n+1) = 4n+2,$$

$$d \mid 4n^2.$$

最后两个事实产生 $d \mid 4n^2+(4n+2)$，再结合第一个事实则得

$$d \mid (4n^2+4n+2)-(4n^2+4n+1)=1,$$

这就是说，$d=1$．于是，从 $2n+1 \mid n^2(n^2+1)$ 可见，$2n+1 \mid n^2+1$．但是

$$n^2+1=\frac{1}{4}[(2n+1)(2n-1)+5],$$

或

$$4(n^2+1)=(2n+1)(2n-1)+5.$$

由于 $2n+1 \mid n^2+1$，所以我们也有 $2n+1 \mid 4(n^2+1)$．于是，$2n+1 \mid (2n+1)(2n-1)+5$，这就是说 $2n+1 \mid 5$．从而 $2n+1=1$ 或 $2n+1=5$，这就给出 $n=0$ 或 $n=2$．

为了完成崔格结果的证明，还要证明：本质上只有一种方法，把数 1，2，3，…，19 排成具有幻性的两圈排列（两种排法视为相同，如果可以通过旋转

或反射把一个变成另一个）．通过某种精细的分析，阿莱尔叫计算机检查了 70 种简单情形（简单是就计算机而言），从而解决了这个问题．算一下编译时间，花了计算机大约 17 秒钟，就发现了亚当斯花了 47 年才发现的结果（并建立了它的唯一性）．我们再讲一两个关于阿莱尔进一步分析的样板就结束这个论题了．

把格子里的数记为 $x_1, x_2 \cdots x_{19}$，如图6-7 所示．在每个"主要"方向上有 $2n+1=5$ 条"线"，取常值和数 s．于是，所有格子数之和是 $1+2+\cdots+19=5s$，结果 $s=38$．

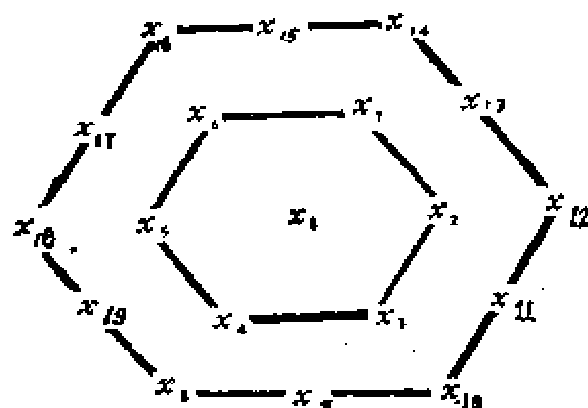


图 6-7

首先我们看出，数 1和 2 不可能落在外角的格子里．例如，就 x_{10} 的情形来说，我们有

$$s = x_8 + x_9 + x_{10} = x_{10} + x_{11} + x_{12} = 38.$$

于是

$$x_8 + x_9 + 2x_{10} + x_{11} + x_{12} = 76.$$

或

$$x_8+x_9+x_{11}+x_{12}=76-2x_{10}.$$

现在，如果 x_{10} 是 1 或是 2，我们就有 $76-2x_{10}\geqq72$。但是，$x_8+x_9+x_{11}+x_{12}$ 的最大值不过是 $19+18+17+16=70$。

几乎同样容易地可以看出，一条外边的中点格子数等于中央格子数与内圈对边上两个格子数之和，例如，$x_9=x_1+x_6+x_7$。事实上，沿着图6–8 所示五条线相加，x_9 算了两次，所有其余的 x_i，除 x_1，x_6，x_7 完全没有碰到以外，都只算了一次。可是，这五条线上诸数的总和等于所有 x_i 的总和，所以第二次所取的 x_9 一定刚好补偿没有取到的 x_1，x_6 和 x_7，即是 $x_9=x_1+x_6+x_7$。作为一个推论，我们看出，一条外边的中点格子数，既然是三个 x_i 之和，至少必须是 $1+2+3=6$。从而断定，1 和 2 这两个数根本不可能出现在外圈上。

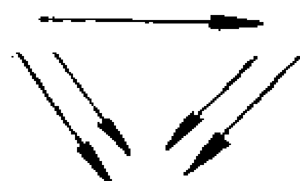


图 6-8

最后，我们证明，中央格子数 x_1 不能大于 8。沿着图 6–9 所示八条线相加，x_1 算了四次，内圈上每个格子数算了两次，每个外角格子数算了两次，而外

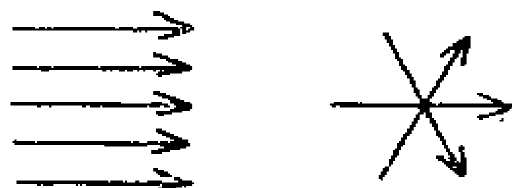


图 6-9

圈各边中点格子数算了一次，即是

$$4x_1+2(\text{内圈})+2(\text{外角})+(\text{外边各中点})=8.38.$$

可是，沿外圈上六条线相加则有

$$2(\text{外角})+\text{外边各中点}=6.38$$

两式相减则得

$$4x_1+2(\text{内圈})=2.38,$$

$$2x_1+\text{内圈}=38;$$

所以$2x_1=38-(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)$，最大值是$38-(1+2+3+4+5+6)=17$，于是

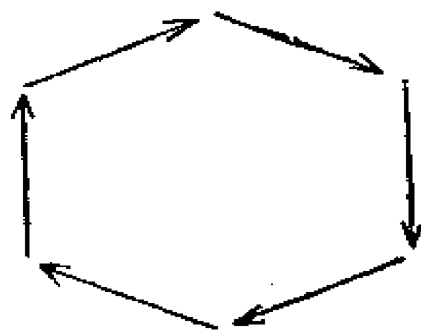


图 6-10

$$2x_1\leqslant 17，\text{即是 } x_1\leqslant 8.$$

附记 最近揭示，Clifford W. Adams 并不是第一个考虑从而发现幻六边形的。似乎，德国汉诺威市的某个叫克玉尔(Martin Kühl) 的大约在1940 年就发现了，但是他的工作没有发表。此外，这个六边形曾经以维克斯 (Tom Vickers)的名义未加评注地发表于 *Mathematicl Gazette, December*, 1958, 291页。崔格关于亚当斯工作的报告，内有他对六边形唯一性的证明，发表在 *Recreational Mathematics Magazine, January* 1964.

练　习

1. 确定：按照国际象棋的规则，在普通的 8×8 棋盘上，一匹马是否能够从一个角正方形走到对角正方形，而在沿路每个其他的正方形上正好停留一次。

2. 一间教室有5排课桌，每排5张。教师要求每个学生改变座位，坐到前后左右任何一张课桌上（当然，这些选择不是对所有学生全都可能）。确定这个指示是否能够执行。

3. 证明：下星期四看歌剧的人中握手奇数次的人数是个偶数。

4. 让 n 表示一个大于1的奇数，A 是一个 $n\times n$ 对称矩阵，每行每列都是整数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个置换。证明：$1, 2, 3, \cdots, n$ 这些整数中每一个都必定出现在 A 的主对角线上。

5. 要想把一整排 n 只竖立的酒杯由一系列搬动翻转过来，每次搬动都是把任意选出的 $n-1$ 只酒杯翻转过来。证明：如果 n 是偶数，这总是可以办到的，但 n 是奇数时就决不可能办到。

6. 一个 6×6 的棋盘被18张 2×1 的骨牌盖满。证明：不论如何盖法，总是可以沿着一条水平线或一条垂直线把棋盘切开，而不切断任何骨

牌（图 6-11）.

7．在平常的 8×8 棋盘上最少可以放置多少匹象，使得每个正方形都至少被一匹象控制？（假定象控制它所占据的正方形）.



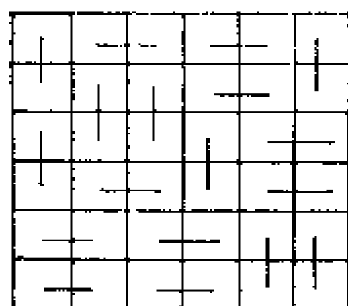


图 6-11

8．国际象棋中的王棋有多少种方式可以从一个角正方形走到对角正方形，如果它总是朝着目的地走？（当然，并非所有的走法都"直接"通向目的地）.

9．在 3×3 的幻方中，数字是从 1 到 9. 证明：任何一行、一列或一条对角线上诸数之和都是 15；中心的数是 5；1 不可能出现在角正方形上.

10．边长为 3 的立方体可以六刀切成 27 个边长为 1 的立方体：平行于每一双对立面而和其中每一个相距为 1 处各切一刀．进行操作时不必移动所产生的任何小块．如果在各刀之间可以随意重新放置所产生的小块，是否可以减少刀数？

11．十三块大小为 1×1×2 的砖只有 26 个单位立方体积，比 3×3×3 立方体少一单位，是否可以把这样的十三块砖排成一个 3×3×3 立方体，留下中央的1×1×1 立方空隙？

参考文献及进一步的读物

〔1〕Fryer and Berman, An Introduction to Combinatorics, Academic Press, New York, 1972.

〔2〕Yaglom and Yaglom, Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Holden-Day, San Francisco, 1964.

〔3〕I. Niven, Mathematics of choice, Random House New Mathematics Library Series, Vol.15.

〔4〕C.L.Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1968.

七、柯泽勒夫—格林贝格关于哈密尔顿回路的理论

1. 引言 在第二章里曾经介绍过哈密尔顿回路（一个图的哈密尔顿回路，就是经过每个顶点正好一次的那种回路）．那里曾经指出，现在还不知道，一个图具有哈密尔顿回路的充要条件是什么．

任何一个图都可以用平面上的一个草图来表示，草图上的点表示顶点，弧表示棱．可是，在很多情况下，要把这些棱画到草图里，其中总有一些要相交，即是彼此在一个不是顶点的点处交叉．例如，要把五个顶点的完全图（即是五个顶点以及一切可能的棱组成的图）嵌入一个平面而不使任何一对棱相交，这是做不到的．如果一个图可以在平面上表示出来，使得任何一对棱都不相交在非顶点的点处，这个图就叫做**平面图**．平面图是很重要的一类图，很多有趣的发现都是就平面图得到的．

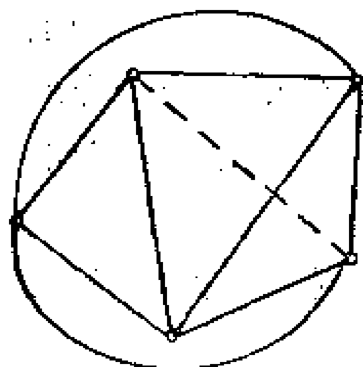


图 7-1

1968 年，在德国的马内

巴赫（Manebach）召开的一次图论会议上，提出了平面图具有哈密尔顿回路的一个必要条件，这个结果是德国数学家萨克斯（Sachs）以两位苏联数学家柯泽勒夫(Kozyrev)和格林贝格(Grinberg)的名义提交给会议的，我最近得到消息说，是格林贝格做出这个数学发现，而柯泽勒夫则是促进了这个发现的传播．这笔帐不管如何算法，反正这个工作肯定是和这两个人有关系，所以我们提到它的时候还是用他们两人的名字．他们的优美方法是那么简单明了，直截了当，所以令人奇怪的是，他们之前竟然没有人想到过．他们的工作有多么深远的影响，有多么重要，还要拭目以待．

2．柯泽勒夫—格林贝格的理论　我们首先考虑有 n 个顶点的平面图 G，具有哈密尔顿回路 C．不属于这个回路的棱，就是出现在 C 的内部或外部的那些“对角线”．一条对角线是放在 C 的内部或是外部，往往是随便的：怎样来安排这些棱，我们是无所谓的．我们假定已经实行了所有抉择，得到图 G 的一个确定的平面表示．

首先考虑回路 C 的内部．假设内部含有 d 条对角线．由于 G 是平面图，它的棱都不相交，所以一条对角线把它经过的区域分成两部分．设想这些对角线是一条一条地放进草图的，那么每放进一条对角线就使回路内部的区域增加一个．从而，这 d 条

对角线把C的内部分成了$d+1$个区域。

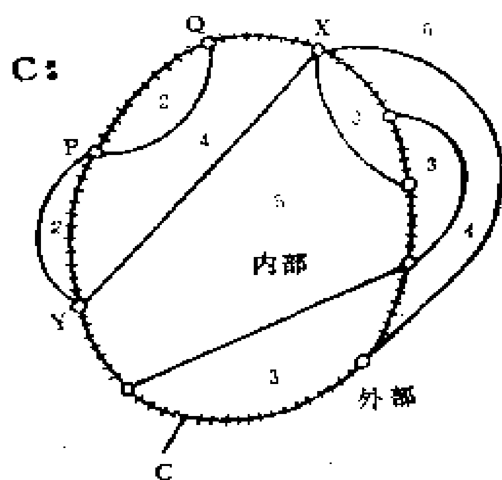


图 7-2

让f_i表示C中由i条棱围成的那些区域的个数，即是C中i边形的个数．这里的i可以小到2，如果碰巧有一个二边形(如PQ)；也可以大到n，如果C中根本没有对角线．由于上面的论证，我们有

$$\sum_{i=2}^{n} f_i = f_2 + f_3 + \cdots + f_n = d + 1.$$

在C中每个i边形中我们记上数字i，表示它的边缘上所含棱的条数．各区域所记数字之和就是围成这些区域的棱的总数：每条对角线算了两次，因为它在两个区域的边缘上；属于回路C的n条棱中每一条则只算了一次（每条棱都只在一个区域的边缘上）．因此，这个总数应该是$2d+n$．可是，很显然，对于每个$i=2, 3, \cdots, n$，由于有f_i个i边形，所以数i在这个总和中将出现f_i次．于是我们有

$$\sum_{i=2}^{n} i f_i = 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = 2d + n.$$

由前面的结果，我们有 $d=\left[\sum_{i=2}^{n} f_i\right]-1$。把这个 d 代入上式，我们得到

$$\sum_{i=2}^{n} i f_i = 2\left[\sum_{i=2}^{n} f_i\right]-2+n=\left[\sum_{i=2}^{n} 2 f_i\right]-2+n.$$

结果

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2) f_i=n-2.$$

转到 C 的外部，我们同样得到

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2) f_i'=n-2.$$

这里 f_i' 表示 C 的外部所含 i 边形的数目. 在推导这个结果时，我们仍然利用了 d 条对角线分出 $d+1$ 个区域的事实，所以这些区域中一定包括了在 C 的外部那个无限区域. 例如，一条对角线产生两个区域，一个是无限区域；围成这个无限区域的棱就是图 G 外围的所有的棱，这些棱或者是对角线，或者是回路 C 上的棱. 把上面两个结果相减，即得柯泽勒夫-格林贝格必要条件

$$\sum_{i=2}^{n}(i-2)\left(f_i-f_i'\right)=0.$$

f_i 和 f_i' 的值依赖于回路 C 在图 G 中的具体路径. 如果 C 是尚待研究的未知对象，则由于情况的

迂回复杂，这个条件的意义似乎捉摸不透．不过，这个等式涉及了 i，也涉及了 f_i 和 f'_i，仅仅凭这点表面上的信息，我们就可以使上述结果得到很好的应用了．

3．三个简单的应用

（1）如图 7-3，已知图 Q 具有各种哈密尔顿回路．证明：任何这样的回路，如果含有 A，B 这两条棱中的一条，就必定不含另一条．

图 Q 只含有五个四边形和两个五边形．Q 的任何一条哈密尔顿回路把这些多边形分隔在其内部和外部．这些多边形的数目必定满足

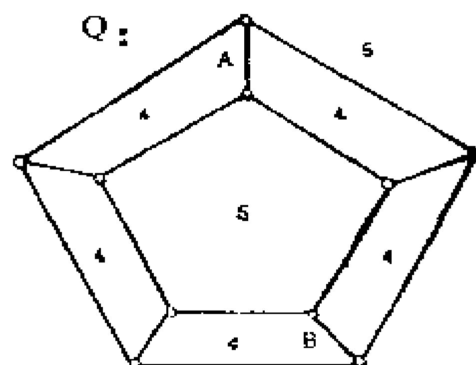


图 7-3

$$2(f_4-f'_4)+3(f_5-f'_5)=0.$$

由此可见，$f_4-f'_4$ 被 3 整除．由于总共只有五个四边形，所以 f_4 和 f'_4 可能取的值只有 4 和 1，这就使 $f_4-f'_4$ 或者是 3 或者是 -3．

既然 A 和 B 这两条棱中每一条都把一对四边形隔开，所以一条哈密尔顿回路，如果含有棱 A，就会使被 A 隔开的一对四边形一个在回路的内部，而另一个在外部．同样，一条哈密尔顿回路，如果含

有棱 B，也会分隔被 B 隔开的两个四边形[①].要使 A 和 B 属于同一条哈密尔顿回路，这五个四边形中至少有两个必须在回路的内部，而且至少还有两个必须在外部．这就使 f_4 和 f_4' 不可能取值 4 和 1，所以和柯泽勒夫—格林贝格条件矛盾．从而，Q 的任何哈密尔顿回路都不可能既含有 A 又含有 B．

另外一个稍微简单一点的解法是阿莱尔（Frank Allaire）提出的，他是滑铁卢大学的研究生．他使用了一个往往行之有效的手法，即是在所考虑的图的某些棱上添加顶点的手法．命 Q' 表示从图 Q 在 A 上添加一个顶点 M、在 B 上添加一个顶点 N 而得的图（见图 7-4），于是 Q 的任何一条哈密尔顿回路，如果既含有 A 又含有 B，它就确定 Q' 的一条哈密尔顿回路．可是，从柯泽勒夫—格林贝格关系直接推出，Q' 没有哈密尔顿回路，因为，Q 若含有哈密尔顿回路，仍然会有

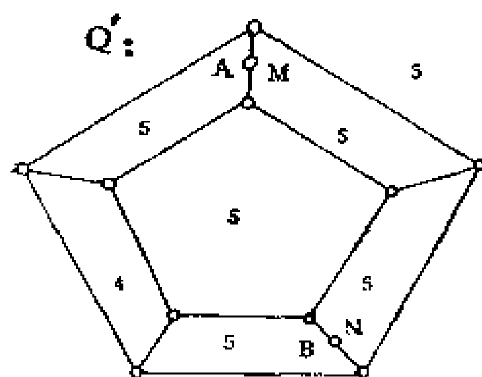


图 7-4

$$2(f_4-f_4')+3(f_5-f_5')=0,$$

①注意，这两对四边形是各不相同的.——译注

所以 $f_4 - f_4'$ 被 3 整除；可是，由于多了那两个额外的顶点，Q' 只含有一个四边形，所以 $f_4 - f_4'$ 或者是 1，或者是 -1．

（2）如图 7-5，证明所给的图 W 不含哈密尔顿回路．这个图有六个多边形：三个两边形和三个六边形．柯洋勒夫—格林贝格条件给出

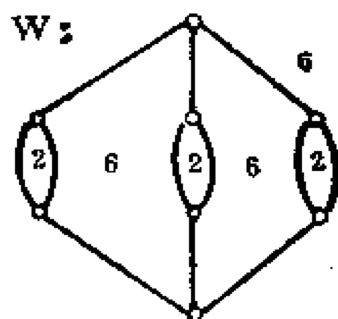


图 7-5

$$0(f_2 - f_2') + 4(f_6 - f_6') = 0,$$

可见 f_6 和 f_6' 相等．然而，这是不可能的，因为 $f_6 + f_6' = 3$．

（3）如图 7-6，证明所给的图 G 没有哈密尔顿回路．

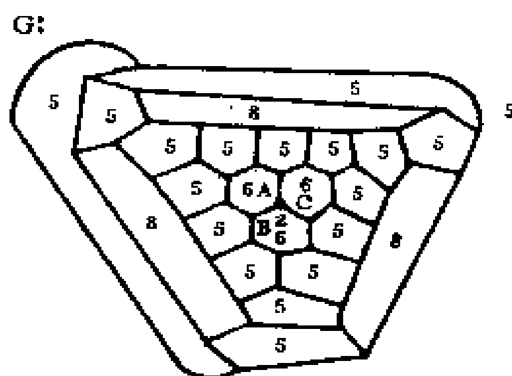


图 7-6

注意，图中各多边形的棱或者是五条，或者是六条，或者是八条，所以一条哈密尔顿回路必定给出

$$3(f_5 - f_5') + 4(f_6 - f_6') + 6(f_8 - f_8') = 0.$$

可见 f_6-f_6' 必须被 3 整除. 但是六边形只有三个, 所以 f_6-f_6' 必定等于 3 或 −3 . 这就是说, G 的任何哈密尔顿回路必须把所有这三个六边形或者全都置于其内, 或者全都置于其外, 从而使 f_6 和 f_6' 之一为 3 而另一个为 0 . 因此, 这条回路不可能含有顶点 Z 处的三条棱 A , B , C 中的任何一条, 因为每一条棱都在两个六边形之间. 从而这条回路达不到顶点 Z , 所以它不可能是哈密尔顿回路.

4. 武特猜想 1880 年, 英国数学家武特 (P. G. Tait) 曾经考虑一类特殊的平面图, 即所谓 3 连通的三次平面图; 他猜测, 任何这样的图都含有哈密尔顿回路. 就目前的讨论而言, 用不着深究 3 连通的精确涵义 (三次的意思不过是说, 每个顶点的价都是 3). 凡是搞四色问题的人, 都认为武特猜想是至关紧要的, 因为, 一旦肯定了这个猜想, 就能证明: 所有平面地图都可以用四种颜色着色. 围绕着这个纪念碑式的未解决的问题而展开的活动, 一直是那么热火朝天, 所以挪威数学家欧雷(Oystein Ore) 宣称, 近百年来, 图论上的几乎每一个进展, 追本溯源, 都是为了解决这个问题. 因此, 1946年英裔加拿大数学家塔特 (W. T. Tutte) 否定了武特猜想之后, 这一辉煌成就曾经受到广泛的注意. 塔特的图 T 描绘如下. 这是 3 连通的三次平面图不含哈

密尔顿回路的一个例子.

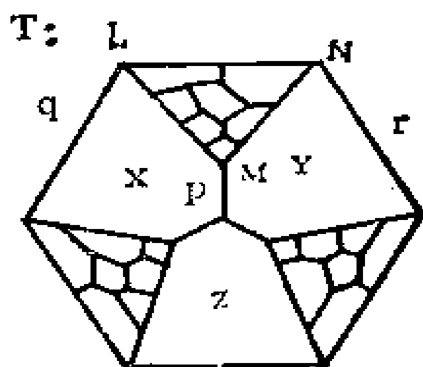


图 7-7

塔特的这个突出成就在于造出了这个图. 一旦造出来了, 要验证它是一个非哈密尔顿图, 也就不太难了. 不过, 乍看起来柯泽勒夫—格林贝格理论似乎是无能为力的. 1972年夏天, 多伦多的一位中学数学教师瓦兹 (Wayne Watts) 成功地应用柯泽勒夫—格林贝格理论证明了塔特图是一个非哈密尔顿图. 我想再说一句, 塔特看到这个简洁灵巧的作品是非常满意的. 瓦兹的论证如下.

首先提出几个一般的事实: 一个图的每一条棱都把一对相邻的多边形隔开; 如果一条棱属于一条回路, 它所隔开的两个多边形就落在回路的两侧, 反之亦然; 如果一条棱不属于某条回路, 它所隔开的两个多边形就在这条回路的同一侧, 反之亦然.

现在让我们用反证法进行, 即是假定塔特图 T 含有哈密尔顿回路 C, 然后再用柯泽勒夫—格林贝格条件来推出矛盾. 注意 T 的草图, 考虑三个十边形 X, Y, Z. 假设其中两个, 例如 X 和 Y, 位于哈密尔顿回路 C 之外, 那么它们的公共棱 p 就不可能是 C 的棱; 同样, 棱 q 和 r 也不可能属于 C, 因为那个无限大的外部多边形也在 C 的外部. 于

是，三角形部分 LMN 就不可能由 C 的棱把它和图 T 的其余部分联结起来，这是与 C 的存在矛盾的，所以十边形 X，Y，Z 中至多只有一个位于 C 之外，换句话说，至少有两个十边形，例如 X 和 Y，必定在 C 的内部．

在这种情况下，它们的公共棱 p 也是不可能属于 C 的．利用同样的论证，q 和 r 这两条棱必须属于 C（那个无限大的多边形是在 C 的外部）．从而，这条回路必定是沿着 q 和 r 这两条棱进出三角形部分 LMN 的，因而子图 LMN 本身必定有一条哈密尔顿**道路**，把 L 和 N 联结起来，通过 LMN 的每个顶点正好一次．

现在把注意力集中到三角形区域 LMN 上，不考虑 T 的其余部分以及相联的棱 p，q 和 r．在 LMN 的外部添上一条棱 LN，就把 LMN 中的那条哈密尔顿道路变成一条哈密尔顿**回路**．于是，柯泽勒夫—格林贝格理论可以应用，结果得到下面的等式：

$$1(f_3-f_3')+2(f_4-f_4')+3(f_5-f_5')+6(f_8-f_8')=0.$$

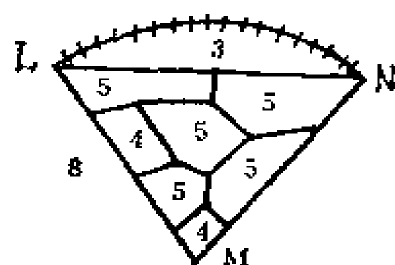


图 7-8

由于棱 LN 属于 LMN 中的哈密尔顿回路，所以以它为边界的那个单个的三边形必定出现在回路的内部，可见 $f_3-f_3'=1-0=1$．还有，

那个无限大的八边形位于回路之外，这就给出 $f_8-f'_8=0-1=-1$。于是，我们的等式化为

$$1+2(f_4-f'_4)+3(f_5-f'_5)-6=0$$

或

$$2(f_4-f'_4)+3(f_5-f'_5)=5. \quad (1)$$

在顶点 M 处，只有两条棱可以用来构成我们的哈密尔顿回路，所以这两条棱必定都属于这条回路。从而，在 M 处的四边形位于回路内部。别的四边形只有一个，所以，这两个四边形或者是都在回路之内，或者是一个在内一个在外，即是，$f_4-f'_4$ 或者是 $2-0=2$，或者是 $1-1=0$。如果它取值 2，则等式 (1) 蕴涵 3 整除 1；如果它取值 0，则等式 (1) 蕴涵 3 整除 5。无论怎样，都是矛盾。

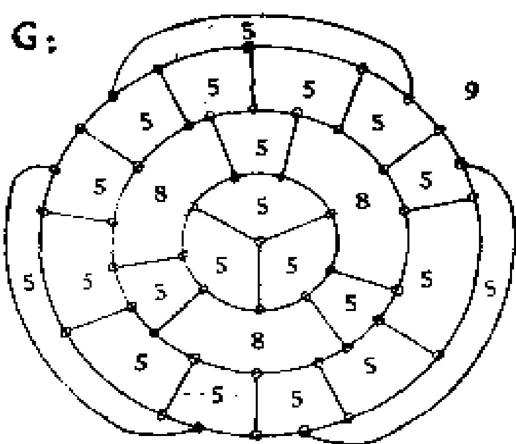


图 7-9

作为本章的结尾，让我们来证明：柯泽勒夫和格林贝格设计的图 G 是式特猜想的更简单的反例。图中所有多边形的棱或者是 5 条，或者是 8 条，或者是 9 条。要使 G 具有哈密尔顿回路，必须 $3(f_5-f'_5)+6(f_8-f'_8)+7(f_9-f'_9)=0$。但是只有一个九边形，所以

$7(f_8-f_8')$ 或者是 7 或者是 -7. 可是，从上面的等式看，这一项必须被 3 整除.

练　　习

1．证明：图 G 中含有棱 x 的任何哈密尔顿回路也必定含有棱 y（见图7-10）.

2．证明：图 G 中任何哈密尔顿回路必定正好含有 x, y, z 这三条棱中的两条. 再证明：一条哈密尔顿回路如果含有 p 和 q 这两条棱，就不可能也含有 x（见图7-11）.

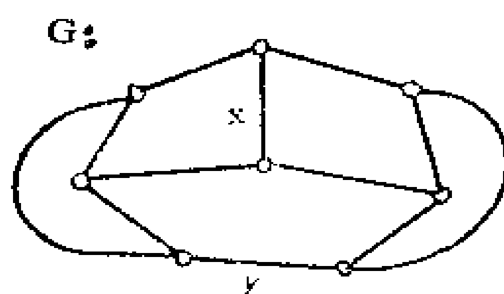


图 7-10

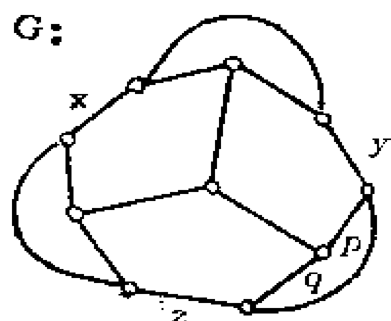


图 7-11

3．证明：图 G 中的五边形 P 必定在任何哈密尔顿回路之外；G 中的哈密尔顿回路必定正好含有 P 的诸棱中的四条(见图7-12).

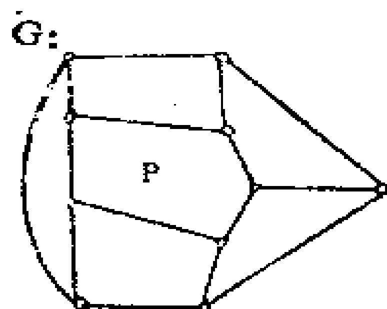
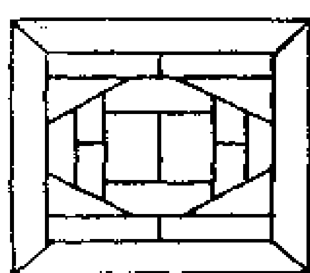


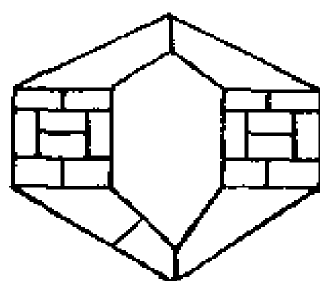
图 7-12

4．利用柯泽勒夫-格林贝格关系来证明：下面各图都没有哈密尔顿回路.〔(b)

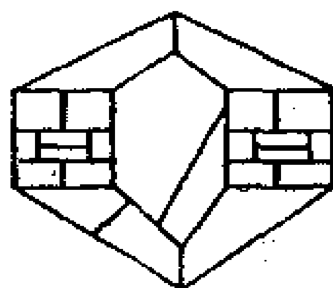
和 (*c*) 两图是 1971 年福克纳 (G. B. Faulkner) 在滑铁卢大学得到的.]



(a)



(b)



(c)

图 7-13

5. 在验证塔特图时, 瓦兹考虑添上了一条额外的棱 LN 的子图 LMN 以构成一条哈密尔顿回路. 不用瓦兹的论证, 仿照阿莱尔解决问题 3 (*c*) 时在棱上添加顶点并利用柯泽勒夫—格林贝格条件来完成这个证明.

八、莫利定理

从古时起，数学家就对用圆规直尺进行几何作图表现出特殊的兴趣．用圆规直尺不可能三等分任意角，这个事实使人们逐渐地不去注意涉及角的三等分线的问题了．这有助于说明下面这个令人赏心悦目的定理何以姗姗来迟的理由：

三角形诸角的六条三等分线中，与一条边相邻的一对三等分线的交点，合起来成为一个等边三角形的顶点．

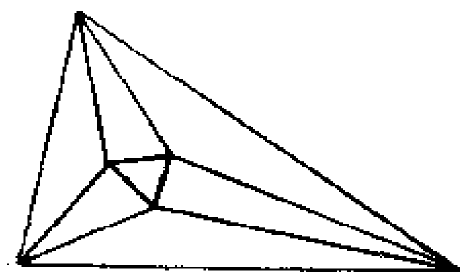


图 8-1

这个事实只是在1904年才由英裔美国几何学家莫利（Frank Morley，1860－1937）发现的．

莫利在美国渡过了他最后的五十年（多半在霍普金斯大学）但他从未放弃他的英国国籍．他是一位了不起的人．他不仅是第一流的数学家，而且棋艺精湛，曾因一度战胜当时的世界冠军拉斯克尔（Emmanuel Lasker）而声誉鹊起．莫利“站得高，看得远”，偶然发

现了这个定理. 1924 年他透露了发现这个定理的过程. 瞧瞧莫利"自己的领地",即使不了解它的全部细节，也是能给人以启发的. 他发现：

"如果变动的心形线① 与一个三角形的各边保持接触，那么心形线中心（即是动圆绕着滚动的那个定圆的中心）的轨迹是九条线的集合，这些线三条三条地平行,方向是一个等边三角形各边的方向. 这些线的交点与二重切线成对应，它们也是第一个三角形的内角、外角的三等分线中某几对的交点".

幸好，这样一个惊人的结果必定会促使别人试图给以更简单的证明. 1909 年,纳拉宁格尔（M.T.Naraniengar）提出了一个非常吸引人的证明.就初等方法而言，这个证明的简易性到现在为止仍是首屈一指的. 这个证明在 1922 年又由恰以尔德(J.M.Child）重新发现.

纳拉宁格尔的证明

设已知三角形 ABC 的角是 $A=3a$，$B=3b$，$C=3c$. 与 BC 相邻的两条三等分线相交于 P，角 B 和角 C 剩下的两条三等分线相交于 S. 于是 PB 和 PC 是 $\triangle SBC$ 中的角平分线，所以 P 是这个三角形的内心，PS 二等分角 S.

---

① 动圆与定圆相等，动圆绕定圆滚动时动圆上一点的轨迹叫做心形线. 如果圆的直径是 a，心形线的极坐标方程可以是 $\rho=a(1-\cos\theta)$. ——译注.

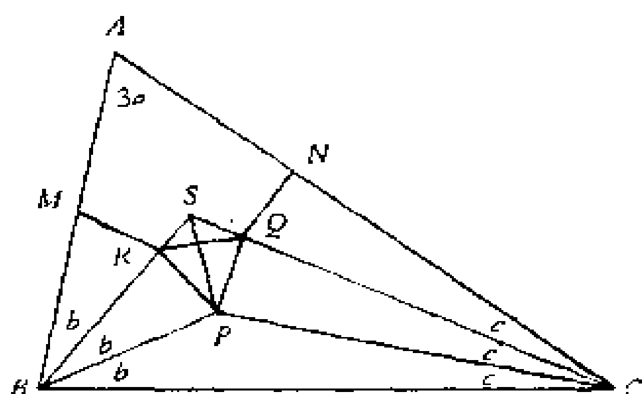


图 8-2

在点 P，在 SP 的每一侧作 30° 的角，从而得到 SC 和 SB 上的点 Q 和 R. 这就使 $\triangle PRS$ 和 $\triangle PQS$ 全等，所以 $PR=PQ$. 由于 $\angle QPR=60°$，所以 $\triangle PQR$ 是等边三角形. 于是，还要证明的就是：AR 和 AQ 把角 A 三等分.

在 BA 上截取长度 BP，得到点 M，在 CA 上截取长度 CP，得到点 N. 于是 $\triangle MBR$ 和 $\triangle PBR$ 全等，所以 $MR=PR$. 同样，$NQ=PQ$. 由于 $\triangle PQR$ 是等边三角形，我们得到

$$MR=RQ=QN$$

其次，我们来计算角 MRQ 的大小. 就 $\triangle PRS$ 而言，注意，外角 BRP 等于在 S 和 P 处两内角之和，即是 $\angle BRP=\frac{1}{2}\angle S+30°$. 角 BRM 也是这样大，所以我们有

$$\angle MRQ=360°-2\left(\frac{1}{2}\angle S+30°\right)-60°$$

$$= 240° - \angle S.$$

同样的论证表明，$\angle RQN$ 也是 $240° - \angle S$。由于三角形内角和是 $180°$，我们有

$$\angle S = 180° - (2b + 2c)$$

$$= 180° - \frac{2}{3}(3a + 3b + 3c) + 2a$$

$$= 180° - 120° + 2a = 60° + 2a$$

于是

$$\angle MRQ = \angle RQN = 240° - (60° + 2a)$$

$$= 180° - 2a.$$

现在转过来讨论下述直观上明显的事实：线段 MR, RQ 和 QN 彼此相等，它们构成的倾角也彼此相等，它们的端点共圆。作 MR 和 RQ 的中垂线 XO, YO，给出点 O，容易证明：$\triangle OMR$, $\triangle ORQ$ 和 $\triangle OQN$ 这三个三角形是全等的，所以 $ON = OQ$，从而，中心为 O、半径为 MO 的圆通过所有这四个点 M, R, Q, N。此外，半径 OR 和 OQ 二等分在 R 和 Q 处的角，直线 XO 和 YO 二等分在 O 处的两角。我们有

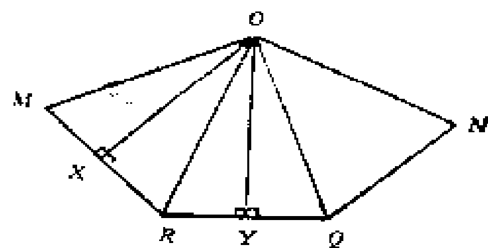


图 8-3

$$\angle MRO = \frac{1}{2}\angle MRQ = \frac{1}{2}(180° - 2a) = 90° - a$$

这就给出 $\angle XOR = a$，$\angle MOR = 2a$，所以

$\angle MON=6a$.

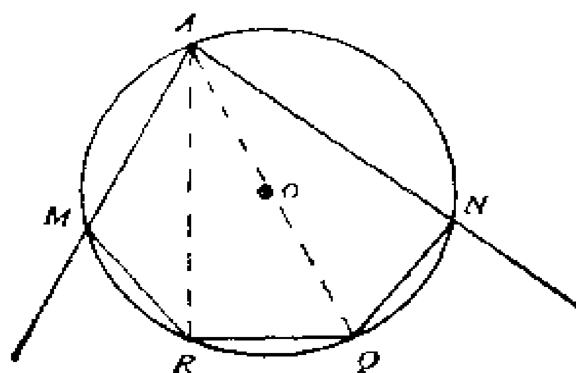


图 8·4

于是，在这个圆中，弦 MN 在中心 O 处张成的圆心角是 $6a$，所以 MN 张成的圆周角是 $3a$，但是 MN 在已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 处张成的角是 $3a$，所以这个圆必须通过 A。由于 MR、RQ、QN 在圆心 O 处都张成 $2a$ 的圆心角，所以每个线段都在 A 处张成大小为 a 的圆周角．从而 AR 和 AQ 把角 A 三等分．

练　　习

1．三角形的内心通常定义为诸内角平分线的交点．证明：$\triangle ABC$ 的内心 I 也可以定义为 $\angle A$ 的角平分线上的一点，使得对边 BC 在该点张成 $90^\circ+\frac{\angle A}{2}$ 的角．

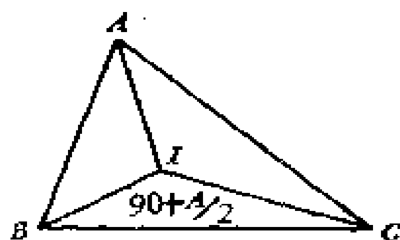


图 8-5

在纳援宁格尔的证明中计算角 BPR 和 CPQ．恰以尔德正是通过确定这两个角，而不是在 P 处

作 30° 的角而得到点 Q 和 R 的.

2. 首先作等边三角形 PQR，在它的各边上向外作三个等腰三角形，顶点是 P'，Q'，R'，在点 Q 和 R 处相等的底角是 x，在 P 和 R 处相等的底角是 y，在 P 和 Q 处相等的底角是 z.

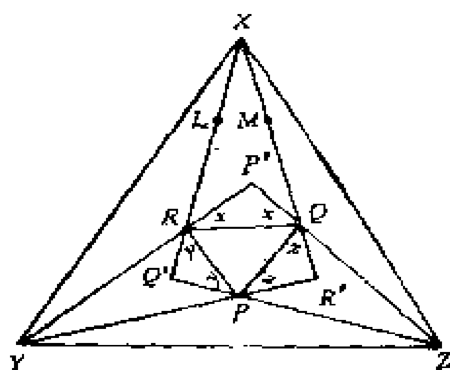


图 8-6

如果适当选择 x，y 和 z，使得每个角都小于 60°，并且其和 $x+y+z=120°$，利用欧几里得平行公设来证明：$Q'R$ 和 $R'Q$ 必定相交于某点 X.（同样也得到 Y 和 Z.）如果 $x=60°-\frac{\angle A}{3}$，$y=60°-\frac{\angle B}{3}$，$z=60°-\frac{\angle C}{3}$，证明：$\triangle XYZ$ 中各个角就是 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$. 于是，把 $\triangle XYZ$ 扩张为与 $\triangle ABC$ 全等的三角形，就立即推出 $\triangle ABC$ 的莫利定理了（见参考文献〔4〕）.

3. 使用练习 2 的记号，证明：PP'，QQ'，RR' 共点.

4. 1914年，菲利浦（W. E. Philip）发表了莫利定理的一个证明（Edinburgh. Math. Soc. Proceedings, p. 120），纲要如下. 请计算各个角，验证他的论断，把他的证明彻底搞懂.

让已知 $\triangle ABC$ 诸角是 $A=3a, B=3b, C=3c$

这些角中至少有一个是锐角，假设 A 是锐角. 如图 8-7，让角 B 和 C 的三等分线相交于 D 和 L；于是，D 是 $\triangle BCL$ 的内心；让内切圆在 Q 和 R 处与两边相切，延长 DQ 和 DR，分别与 AB 和 AC 相交在 H 和 K. 于是，由全等三角形得到 $QH = DQ$，$DR = RK$，所有这四个线段都等于内切圆的半径. 作切线 KP，延长与 BL 交于 F.

图 8-7

于是，(1) $\triangle DKP$ 诸角是 30°，60°，90°. (2) $\angle QDR = 120^\circ - 2\alpha$。 (3) $\angle QHF = 30^\circ - \alpha$ (4) $\angle DHK = 30^\circ + \alpha$. (5) $\angle FHK = 2\alpha$. (6) $\angle HKF = \alpha$. (7) $\angle HFK = 180^\circ - 3\alpha = 180^\circ - \angle A$. 从而，$A, H, F, K$ 四点共圆. 在这个圆中，弦 HF 张成的圆周角是 $\angle HKF = \alpha$，所以 $\angle HAF = \alpha$，即 AF 是角 A 的一条三等分线.

同样，从 H 作 $\triangle BCL$ 的内切圆的切线，延长与 CL 相交于 E，结果 EA 是角 A 的另一条三等分线. $\triangle DHK$ 和圆心 D 构成一个相当对称的图形：三角形是等腰的 ($DH = DK$)，圆心 D 是两腰的公共顶点. 于是，用不着重复上述论证，我们看出，$\angle EDR = \angle FDQ = 30^\circ - \alpha$，还有 $FD = DE$.

这就表明$\angle FDE=60°$，由此断定$\triangle DEF$是等边三角形，从而定理得证．

5．证明：莫利定理对三角形诸外角的三等分线也成立．

参考文献及进一步的读物

〔1〕Coxeter and Greitzer, Geometry Revisited, Random House New Mathematical Library Series, Vol. 19.

〔2〕M. T. Naraniengar, Mathematical Questions and Their Solutions from the Educational Times (New Series), Vol. 15, 1909, p. 47.

〔3〕J. M. Child, A proof of Morley's theorem, *Math. Gaz.* (1922) 171.

〔4〕H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, Wiley, New York, 1961.

〔5〕American Mathematical Society, Semi-Centennial Publications, Vol 1-History.

九、一个组合分析问题

正方形的两条对角线把正方形内部分成四个区域．正五边形的诸对角线把它的内部分成十一个区域．任意的n边形的诸对角线把它的内部分成几个区域呢？我们将在本章中算出这个数目．

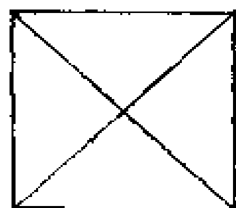
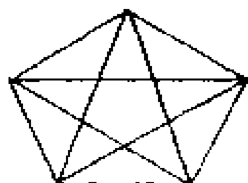



图 9.1

为了使所有的对角线都完全在图形内部，我们只考虑凸多边形．由于顶点在平面上变动将会使对角线随之移动；改变内部区域的大小和形状，所以，如果三条或更多的对角线移动后通过同一点，那么多边形内部将有一个区域随着点的消失而消失，从而减少了区域的数目．我们的目的是求得区域数目的最大值，所以我们只考虑任何三条对角线都不共点的n边形．于是，我们的问题如下：

如果一个凸n边形中任何三条对角线都不共点，那么所有这些对角线把这个n边形的内部分成几个区域？

计数这件事往往是一种独出心裁的细致技巧，

我们现在不是来介绍所有已知的方法，而是对我们的问题给出三个优美的解法，从而表明组合分析这门正在蓬勃发展的学科丰富多采的面貌.

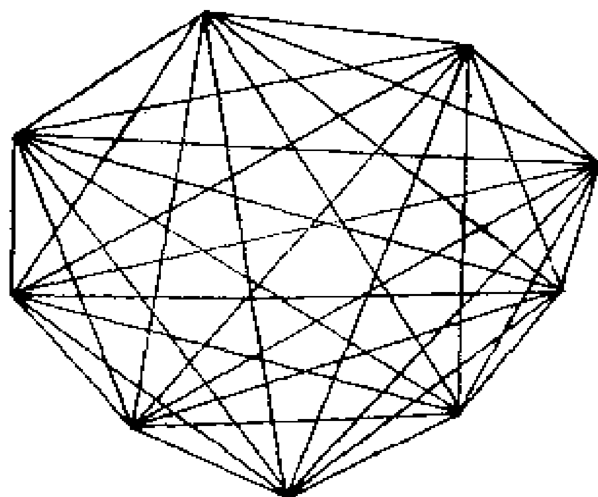


图 9-2 九边形（154个区域）

1. 计算顶点和角度 让 n_k 表示我们的 n 边形所分成的诸区域中 k 边形的个数，m 表示 k 的最大值．现在来数一下每三个顶点构成的三角形，每四个顶点构成的四边形，等等，所有这些顶点合起来的总数，包括许多重复计算的在内，就是

$$3n_3+4n_4+5n_5+\cdots+mn_m.$$

每个内部顶点都是两条对角线的交点，所以是 n 边形内部四个区域的公共顶点，因而在上述总和中每一个都计算了四次．n 边形周界上的每个顶点 A_v 是对角线

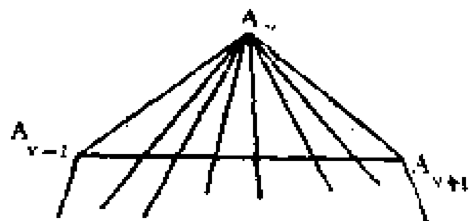


图 9-3

$A_{\nu-1}A_{\nu+1}$截出的 $n-2$ 个三角形的顶点，所以计算了 $n-2$ 次。于是，我们有

$$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m$$
$$=4(\text{内部顶点数})+(n-2)(\text{周界顶点数})$$

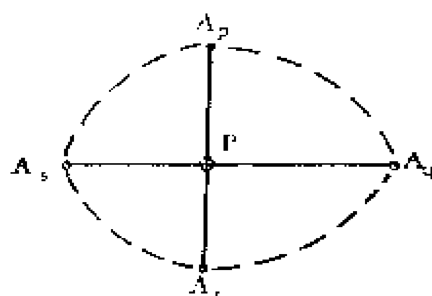


图 9-4

因为周界顶点中所有可能的四个顶点的组合与所有的内部顶点成一一对应，所以内部顶点的个数不过就是 C_n^4，即 n 边形顶点四元组的个数，从而，我们得到

(1) $$3n_3+4n_4+\cdots+mn_m=4C_n^4+(n-2)n.$$

其次，让我们把所有多边形的所有的角加起来：k 边形诸角之和是 $(k-2)180°$，所以全部多边形诸角的总和是

$$n_3\cdot180°+n_4\cdot360°+n_5\cdot540°+\cdots$$
$$+n_m(m-2)\cdot180°.$$

这次当然没有重复计算，我们可以把这些角按任何次序随意加起来：在内部顶点处四个角之和是360°，所以所有内部顶点处诸角之和正好是 $C_n^4\,360°$；在 n 边形周界上诸顶点处各角之和是 $(n-2)180°$。于是，总起来我们有

$$n_3\cdot180+n_4\cdot360+\cdots+n_m(m-2)\cdot180$$
$$=360C_n^4+180°(n-2).$$

各项遍除以 180，我们得到

(2) $$n_3+2n_4+3n_5+\cdots+(m-2)n_m$$
$$=2C_n^4+(n-2).$$

从前面的等式（1）中减去这个等式得

$$2n_3+2n_4+2n_5+\cdots+2n_m$$
$$=2C_n^4+(n-1)(n-2).$$

除以 2，我们得到所要的结果：

$$\text{区域数}=n_3+n_4+n_5+\cdots+n_m$$
$$=C_n^4+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=C_n^4+C_{n-1}^2.$$

2. **欧拉公式** 在这个解法里，我们将利用欧拉(Euler)对简单多面体及平面地图给出的著名公式，即是 $V-E+F=2$，这里 V,E,F 分别表示图形的顶点数、边数和面数。公式里的 F 计算了图形外部那个无限大的面，所以

$$F=(\text{内部面的个数})+1.$$

由于我们只需要内部面的个数，两式相减得到

$$\text{内部面的个数}=1+E-V.$$

V 的值不过就是已知 n 边形的内部顶点数及周界顶点数之和，即是

$$V=C_n^4+n.$$

于是问题的解法就会看如何求出 E。

我们可以把图形的边分为三类：(*a*) 已知 n 边形的各边；(*b*) 两个端点都是内部顶点的各边；(*c*)

一个端点是内部顶点，另一个是已知 n 边形的顶点的各边．我们看出，类（c）有 $n(n-3)$ 条边，因为在已知 n 边形的每个顶点处都有 $n-3$ 条这样的边．其次，在每个内部顶点处有四条边相交，所以 $4C_n^4$ 这个数把所有的内部边都计算在内了；实际上，(b) 类的每条边算了两次，而 (c) 类的每条边算了一次．我们可以用等式表为

$$4C_n^4=2(b)+(c).$$

用同样的记号我们有 $2(a)+(c)=2n+n(n-3)$.

两式相加得

$$4C_n^4+2n+n(n-3)=2(a)+2(b)+2(c).$$

等式右端正好是 $2E$，所以

$$E=2C_n^4+n+\frac{n(n-3)}{2}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\text{内部面的个数}\\&=1+\left[2C_n^4+n+\frac{n(n-3)}{2}\right]-\left[C_n^4+n\right]\\&=C_n^4+\frac{n(n-3)}{2}+1\\&=C_n^4+C_{n-1}^2,\end{aligned}$$

和前面一样．

3．逐步消去法　我们把最巧妙的解法留到最后．按照这种解法，我们不过是把图形加以肢解，即是逐步取消所有的对角线，每次取消一条，同时

注意在这个过程中区域数目的减少.

参考下图，考虑由于取消对角线 A_uA_v 而消失的那些区域的个数. 想象这条对角线象一条胶布那样被揭起来：当线段 A_uX 被揭起之后，本来被它隔开的区域Ⅰ和Ⅱ，就合并起来成为一个区域；当线段 XY 被揭起时，区域 L 和 M 合并成一个区域；沿着这条对角线的每个线段都是如此. 于是，消失的区域数等于沿着这条对角线的线段数，即是其他的对角线与 A_uA_v 的交点 $X,Y,Z,\cdots$ 的个数再加一.

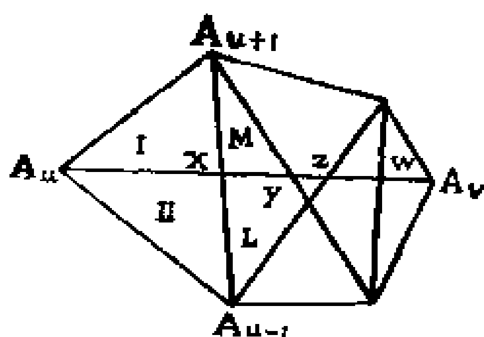


图 9-5

由于通过每个交点的对角线只有两条，所以取消其中一条就会使这个交点也从另一条对角线上消失. 于是，临到取消某一条对角线时，它原有的许多交点，甚至所有的交点可能早已经被除去了. 因此，在取消一条对角线时，减少的区域数就是这条对角线取消前还留下的那些交点数再加一. 注意，在取消对角线的整个过程中逐次记录减少的区域数时，每个交点自始至终恰好只计算了一次，因而在这个过程中消失区域的总数是

〔(第一条对角线上的交点数)＋1〕

＋〔(第二条对角线上留下的交点数)＋1〕

+〔(第三条对角线上留下的交点数)+1〕

+ ⋯

+〔(最后一条对角线上留下的交点数)+1〕.

就这个和式而言，对于每条对角线都有相应的一项，每一项里都有一个1，因而这个和式的值就是所有内部交点的个数再加上对角线的条数.注意，把 n 个已知顶点中的一对顶点联结起来的所有 C_n^2 个可能的线段中，有 n 个是已知 n 边形的边，所以对角线的条数是 C_n^2-n，这就给出

$$\text{消失区域的总数}=C_n^4+C_n^2-n.$$

可是，把所有的对角线都取消之后，n边形内还剩下一个区域（n 边形的内部本身）．从而，开头必定存在的区域数就是

$$\begin{aligned}(C_n^4+C_n^2-n)+1&=C_n^4+\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)\\&=C_n^4+(n-1)\frac{n-2}{2}\\&=C_n^4+C_{n-1}^2.\end{aligned}$$

练　　习

1. 在凸 n 边形内部随意取出 m 个点，把图形中这 $m+n$ 个点(取出的 m 个点和原有的 n 个顶点)随意联结起来，使得任何两条联线都不交叉，并且

图形中所有区域都是三角形．试问：图形中有多少三角形？

2．证明：每个简单多面体至少有两个面具有同样的边数．

3．N 条直线占有最广位置，把平面分成若干区域，其中有多少是无限区域？

4．确定平常的 8×8 国际象棋棋盘上各种大小、各种位置的正方形的总数，再计算矩形的总数．

5．证明：已知钝角三角形总是可以分成七个或更少的锐角三角形．

6．说明如何把正方形分成八个锐角三角形．

7．假设了维空间的 n 张平面中每三张平面正好相交在一点，任何四张平面都不相交在一点．试问：这 n 张平面把空间分成多少个立体区域？

8．如果一个简单多面体的所有的面都具有中心对称性，证明：其中至少有六个面是平行四边形．

9．简单多面体的每个顶点正好是三个面的交点．如果每个面或者是五边形或者是六边形，试问：五边形面有多少？

参考文献及进一步的读物

〔1〕Yaglom and Yaglom, Challenging

Mathematical Problems with Elementary Solutions, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[2] Fryer and Berman, Introduction to Combinatorics, Academic Press, New York, 1972.

十、多倍完美数，过剩数，实用数

1．引言　在古代，毕达哥拉斯学派的学者们按照自然数因子之和把自然数分为三类：短缺数，完美数和盈余数．6 这个数叫做**完美数**，因为它的真因子 1，2 和 3 之和就是 6 本身．8 和12 这两个数分别是**短缺数**和**盈余数**，因为 8 的真因子，即是 1，2 和 4，加起来只有 7，而12 的真因子 1，2，3，4 和 6，加起来超过了12．这样一来，短缺数和盈余数有许许多多，但完美数却非常少见．到 1972 年，只发现了 24 个完美数，头四个是

6，28，496，8128，

第五个就是上百万的数了，以后就变得更大．在欧几里得的著作里有一个计算偶完美数的公式：若 2^n-1 是素数，则 $m=2^{n-1}(2^n-1)$ 是完美数．十八世纪欧拉(Euler) 证明了逆定理：任何偶完美数都是形如 2^{n-1} 和 2^n-1 的两个数之积，其中 2^n-1 是素数．有了这个公式，就容易证明，任何偶完美数的个位数必定要么是 6 要么是 8；如果它的末尾是 8，结尾就是 28．使人大惑不解的是，从来也没有发现过任何奇完美数；是否存在奇完美数，这还是一个没有解

决的问题.

数论里有一个著名的函数 $\sigma(n)$，表示自然数 n 的所有因子之和，包括因子 n 本身在内。于是，利用 $\sigma(n)$，完美数可以定义为使得 $\sigma(n)=2n$ 的数. 短缺数和盈余数可以同法定义.

在结束引言之前，让我们来推导一个公式，用 n 的素因子分解

$$n=p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\cdots\ p_k^{\alpha_k}$$

来表示 $\sigma(n)$，然后对这个公式加以利用.虽然代数上的记法使推导显得复杂，但所涉及的思想却不会使我们感到有任何难解之处. n 的因子 d 就是

$$d=p_1^{b_1}\ p_2^{b_2}\cdots\ p_k^{b_k}$$

这些数，其中每个 b_i 限于 $0\leqslant b_i\leqslant \alpha_i$ 这个范围（如果有一个 b_i 大于 α_i，d 就不能整除 n）. 但是，这些数正好就是乘积

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{\alpha_k})$$

的展式中的各项. 所以这个展式就是 $\sigma(n)$ 的值由于每个括弧都是一个几何级数，所以有

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

现在我们可以证明一个有用的结果：如果 m 和 n 互素，则

$$\sigma(mn)=\sigma(m)\cdot\sigma(n).$$

假设 m 和 n 的素因子分解是

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\qquad n=q_1^{b_1}q_2^{b_2}\cdots q_t^{b_t}.$$

由于 m 和 n 互素，所以任何 p_i 和任何 q_j 都不是同一个素数．于是

$$mn=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}q_1^{b_1}q_2^{b_2}\cdots q_t^{b_t},$$

我们有

$$\sigma(mn)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}\cdot\frac{q_1^{b_1+1}-1}{q_1-1}\cdots\frac{q_t^{b_t+1}-1}{q_t-1}.$$

这显然就是 $\sigma(m)\cdot\sigma(n)$．

2．**多倍完美数**　近代，完美数的概念已经推广如下：

对于自然数 n，如果 $\sigma(n)=kn$，k 是自然数，则 n 称为 k 倍完美数．

这样一来，古代的完美数相当于 $k=2$ 的情形．容易验证，120 和 672 这两个数是三倍完美数，因为 $\sigma(120)=360$，$\sigma(672)=3(672)$．我们用"p_k数"这个名称来表示 k 倍完美数．于是，

$$n=2178540=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2\cdot13\cdot19$$

是一个 p_4 数，因为这时 $\sigma(n)=4n$．尽管多年来多倍完美数一直受到人们的注意，但下面两个基本问题却从未得到解答：

(1) 对于所有 $k=2,3,4\cdots$ 是否有无限多的 p_k 数？算出这些数。

(2) 是否存在奇 p_k 数？

现在考虑有关 p_k 数的三个小问题，这些问题都已经解决，读起来令人兴味盎然，

(a) 如果 n 是 p_3 数，并且不是 3 的倍数，证明：$3n$ 是 p_4 数。

由于 n 是 p_3 数，我们有 $\sigma(n)=3n$. 因为 n 不是 3 的倍数，所以 3 和 n 互素，从而 $\sigma(3n)=\sigma(3)\cdot\sigma\cdot(n)$. 但 $\sigma(3)=1+3=4$，所以 $\sigma(3n)=4\sigma(n)$. 由于 $\sigma(n)=3n$，我们有 $\sigma(3n)=4(3n)$，这就表明 $3n$ 是 p_4 数.

(b) 若 $3n$ 是 p_{4k} 数，n 不被 3 整除，证明：n 是 p_{3k} 数。

我们有 $\sigma(3n)=\sigma(3)\sigma(n)=4\sigma(n)$，因为 3 和 n 互素. 但是，由于 $3n$ 是 p_{4k} 数，所以 $\sigma(3n)=4k(3n)$. 于是 $4\sigma(n)=4k(3n)$，所以 $\sigma(n)=3kn$. 这就是说，n 是 p_{3k} 数。

(c) 若 n 是 p_3 数，3 整除 n，但 5 和 9 不整除 n，证明：$45n$ 是 p_4 数。

我们有$\sigma(n)=3n$；存在自然数k，使 $n=3k$；这里 3 不整除 k. 因为 9 不整除 n. 因此，$\sigma(n)=\sigma(3k)=\sigma(3)\sigma(k)=4\sigma(k)$. 由于 3^3, 5 和 k 两两互素，所以 $\sigma(45n)=\sigma(3^3\cdot5\cdot k)=\sigma(3^3)\sigma(5)\sigma(k)$

$=(40)\cdot(60)\sigma(k)=60[4\sigma(k)]$. 但 $4\sigma(k)=\sigma(n)$，所以 $\sigma(45n)=60\sigma(n)=60(3n)=180n=4(45n)$.
这就是说，$45n$ 是 p_4 数.

在本节结束时，我们最后应用一下求 $\sigma(n)$ 的那个公式.

定理　任何 p_5 数都有 5 个以上不同的素因子.

把 p_5 数 n 的素因子分解表为

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 于是 $\sigma(n)=5n$ 给出等式

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

$$=5p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

两端除以 n 得到

$$\frac{p_1-(p_1^{\alpha_1})^{-1}}{p_1-1}\cdot\frac{p_2-(p_2^{\alpha_2})^{-1}}{p_2-1}\cdots\frac{p_k-(p_k^{\alpha_k})^{-1}}{p_k-1}=5.$$

丢掉分子的负项，得到不等式

$$\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}>5.$$

如果认为所有素数都排成递增次序，那么 $p_i/(p_i-1)$这些因子的值就是严格递减序列 $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{6}$，$\frac{11}{10}$，…中的项. 注意，这个序列中任何五项的乘积都小于头五项的乘积，不足五项的乘积更小于头五项的乘积，但是，即使头五项的乘积也只是

$\frac{77}{16}<5$. 因此，要使上面的不等式成立，所用到的素数一定不止五个，这就是说，n 具有五个以上不同的素因子.

3. 过剩数 1944年数学家厄尔迪什(Erdös)和阿劳格鲁(Alaoglu)定义了过剩数如下：

自然数 n 称为过剩数，如果对所有 $k<n$，

$$\sigma(n)/n>\sigma(k)/k。$$

当 $n=1,2,3,4,5$ 时，$\sigma(n)$ 的值分别是1,3,4,7,6，所以 $\sigma(n)/n$ 的值是 1,3/2,4/3,7/4,6/5. 于是，我们看出，2 和 4 都是过剩数，3 和 5 则不是. 现在让我们对下述事实给出一个优美的证明：存在无限多的过剩数.

让我们把自然数 n 的因子按递增次序记为 $d_1=1,d_2,d_3,\cdots,d_t=n$。于是 $n/d_1, n/d_2,\cdots,n/d_t$ 是同样的因子序列，次序相反，所以给出同样的和数：

$$\sigma(n)=\sum_{d_i|n}\frac{n}{d_i}.$$

两端除以 n 得到

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d_i|n}\frac{1}{d_i},$$

这是 n 的诸因子倒数之和.

当 n 遍历自然数 1,2,3,…时，它可以取所有阶乘 $m!$ 的值. 如果 $n=m!$，n 的因子就囊括 1，2，

3、…，m 所有这些数，可能还有很多别的因子，所以

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d_i|n}\frac{1}{d_i}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}.$$

这是著名的调和级数的部分和，当 m 无限增加时，它是无限递增的。这就是说，当 n 遍历所有自然数时，$\sigma(n)/n$ 的值无限增大。如果把 $\sigma(n)/n$ 这个数记为 u_n，则序列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 无上界。

注意，这个序列的项 u_n 如果大于所有前面各项 u_k，则 n 是过剩数。因为这个序列无上界，所以超过以前各项的 u_n 一定会不断出现，越来越大(不必是相邻项)。因此，随着这样的 u_n 不断出现，相应的下标 n 就构成过剩数的无限集。

4. 实用数 1948 年，斯里尼瓦散 (A. K. Srinivasan) 定义实用数如下：

自然数 n 称为实用数，如果对所有的 $k\leqslant n$，k 都是 n 的某些不同的真因子之和。

所有的偶完美数都是实用数。事实上，对于所有的 $n=2, 3, 4, \cdots$，不论 2^n-1 这个数是否为素数，$m=2^{n-1}(2^n-1)$ 都是实用数。

证 m 的真因子包括下面两组数：

(A) $1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n-1}$,

(B) $2^n-1, 2(2^n-1), 2^2(2^n-1), \cdots, 2^{n-2}(2^n-1)$.

如果 2^n-1 刚好是合成数，那就还有一些别的因子。可是，只用这些真因子，我们就能够把适当的因子

加起来得到小于或等于 m 的所有的 k。

我们考虑三种情况：

(1) 若 $k \leqslant 2^{n-1}$，则 k 是集(A)中某些数的和，k 的二进位表示说明它是由这些数中哪些相加而成的.

(2) 若 $k = m$，则 k 是 (A) 和 (B) 中所有各数之和，这一点容易验证，把所说的两个几何级数加起来就行了.

(3) 若 $2^{n-1} < k < m$，则以 $2^n - 1$ 作除数，k 可以表为 $k = (2^n - 1)t + r, 0 \leqslant r < 2^n - 1$。注意，除非商数 $t < 2^{n-1}$，否则 k 的值至少是 m. 因此，数 t 本身是集(A)中某些数之和（仍然考虑二进位表示）. 实际上，我们甚至不需要用到 2^{n-1} 这个数，因为它比 t 大.

考虑二进位记法，我们看出，集 (A) 中诸数能够产生直到 $2^n - 1$ 的一切数，所以 r 也是集 (A) 中某些数之和. 结果，

$k = (2^n - 1)(2^i + 2^j + \cdots + 2^q) + (2^t + 2^u + \cdots + 2^v)$，其中头一个和式中最大方幂是 $2^q \leqslant 2^{n-2}$，第二个和式中最大方幂是 $2^v \leqslant 2^{n-1}$. 把 k 的这个表达式展开，显然可见，k 是(B)中某些项以及(A)中某些项的和.

5. 其它有关的数

(a) **几乎完美数** 几乎完美数就是盈余最小

的数，即是 $\sigma(n)$ 超过 $2n$ 之值最小，也就是说，$\sigma(n)$ 比 $2n$ 多 1。于是，对于几乎完美数，我们有 $\sigma(n)=2n+1$。换个说法，自然数 n 称为几乎完美数，如果它是自己的所有本质因子（即不包括 1 和 n 在内的诸因子）之和，于是 $n=\sigma(n)-1-n$，如前．不幸，现在还未找到任何几乎完美数。

和几乎完美数密切相关的是短缺最小的数，即是使得 $\sigma(n)=2n-1$ 的自然数 n。容易看出，2 的所有方幂都属于这一类。

（b）**半完美数** 自然数 n 称为半完美数，如果它是自己的某些真因子的和。例如，$n=12$ 是半完美数，因为 $12=6+4+2$。显然，半完美数不可能是短缺数，任何完美数都是半完美数。看来，盈余数多半是半完美数；例外的情形很少见，所以不是半完美数的盈余数又别名"怪数"．三个最小的怪数是 70，836 和 4030．迄今尚未发现任何奇数怪数：厄尔迪什曾经悬赏十美元求第一个奇数怪数，悬赏 25 美元最先证明不存在奇数怪数。不过，已经知道，怪数有无限多。怪数的研究是宾夕法尼亚（Pennsylvania）州立大学的本柯斯基(Stan Benkoski）开创的，他和 Erdös 合作即将发表的一篇文章表明：怪数序列具有正的施尼勒曼（Schnirelmann）密度(一个自然数序列的施尼勒曼密度是分式 $A(n)/n$ 的下确界，$A(n)$ 表示该序列中不大于 n

的各项的项数).一个序列如果不含数1,它的密度自然是零.为了避免这个讨厌的情况,通常把数1添到本来不含这个数的序列里.对于怪数序列必须如此.奇数序列的密度是1/2,而平方数、素数以及2的方幂序列的密度都是零.这就表明,用怪数来筛自然数,这个筛子比素数及其他密度为零的序列稍微“密”一些.

在结束本章之际,我们指出,自然数的迷人的性质似乎是无穷无尽的,还有另外一些奇特的数,我们尚未触及,例如“强力数”.

练　　习

1. 证明:一个完美数或盈余数n的任何倍数mn, $m\geqslant 2$,都是盈余数.

2. 证明:一个短缺数的任何因子都是短缺数.

3. 证明:若p为素数,则p^n是短缺数.

4. 证明:$\sigma(n)$是奇数的充要条件是:n为平方数或二倍平方数.

5. 证明欧拉定理:**奇完美数一定具有形状$m=p^{4a+1}\cdot Q^2$,其中p是奇素数,与Q互素.**

参考文献及进一步的读物

W. Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Warszawa, 1964.

十一、圆，正方形和格子点

1．引言 我们在“果园问题”一章里已经知道，坐标平面上的格子点 (x,y) 的坐标 x 和 y 都是整数，这些点行列均匀地分布在诸单位正方形的顶点处．显然，围绕任何一个格子点可以画一个小圆，把所有其余的格子点隔在外面．稍微试验一下就会发现，不难确定一些小圆，其内部刚好含有两个、三个或四个格子点．可是，如果事先指定了一个较大的数目，要确定一个圆，刚好把那样多的格子点包含在内，就并不总是很容易的事了．本章首先建立下面的定理：对于每个自然数 n，平面上存在一个圆，其内部刚好含有 n 个格子点．

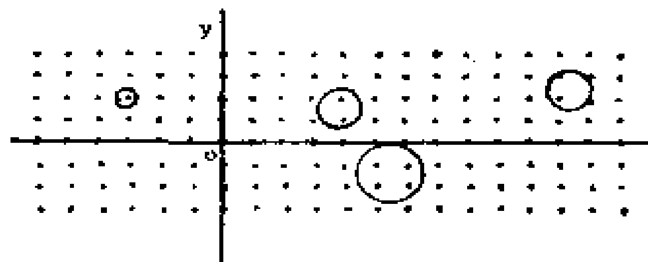


图 11-1

这个定理是下述事实的简单推论：任何两个格子点到点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ 的距离都各不相同．我们过一

会儿再来证明这个事实．因此，所有的格子点可以按照它们到$\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$的距离大小排成一个序列：

p_1，p_2，p_3，…；p_1离得最近，p_2是第二个最近的，等等．于是，以$\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$为圆心、通过$p_{n+1}$的圆，其内部正好含有$n$个格子点$p_1$，$p_2$，…，$p_n$．

我们用反证法来证明上述事实．假设两个格子点(a,b)和(c,d)到点$\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$的距离相同，那么

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2.$$

把有理部分和无理部分分开，我们得到

$$2(c-a)\sqrt{2}=c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d),$$

左端是无理数或零，而右端是有理数，要相等，两端都得是零，所以

$$c=a,\quad c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0.$$

由于$c=a$，后一等式给出$d^2-b^2-\frac{2}{3}(d-b)=0$．所以

$$(d-b)\left(d+b-\frac{2}{3}\right)=0.$$

由于d和b都是整数，因子$d+b-\frac{2}{3}$不可能是零．所以必定有

$$d-b=0, \quad d=b.$$

既然 $c=a$，这两个格子点 (a,b) 和 (c,d) 必须是同一个点，证毕.

斯忒因豪斯（Hugo Steinhaus）甚至证明了：对每个自然数 n，存在一个面积为 n 的圆，其内部刚好含有 n 个格子点.

2. **辛泽尔定理** 现在来考虑这样一种圆，其周界上刚好含有 n 个格子点. $n=1$ 和 $n=2$ 的情形是微不足道的. 可是，即使是 $n=3$ 这个最初的情形也颇费踌躇. 1958 年，华沙来的一位波兰数学家辛泽尔（André Schinzel）对下述定理发表了一个赏心悦目的证明：对每个自然数 n，平面上有一个圆，其周界上刚好有 n 个格子点，他的证明还有一个特点，就是方程定出了所要的圆. 他的论证如下：

n 是偶数和奇数的情形分别考虑，辛泽尔证明了：

(1) 如果 $n=2k$，则以 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 为心、以 $\frac{1}{2}\cdot 5^{(k-1)/2}$ 为半径的圆刚好通过 n 个格子点.

(2) 如果 $n=2k+1$，则以 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 为心、以 $\frac{1}{3}\cdot 5^{k}$ 为半径的圆刚好通过 n 个格子点.

他利用了数论里一个著名的公式：方程 $x^2+y^2=n$ 的整数解 (x, y) 的个数 $r(n)$ 是

$$r(n) = 4(d_1 - d_2),$$

这里 d_1 是 n 的因子中形如 $4k+1$ 的个数，d_2 是形如 $4k+3$ 的因子个数．这个公式的推导是初等数论的事情，写起来太长，这里就不讲了，我们不加证明地放心使用好了．不过，注意，这里要把 (x, y) 和 (y, x) 算成两个不同的解，例如，$r(1) = 4(1-0) = 4$，这些解是 $(1,0)$，$(0,1)$，$(-1,0)$，$(0,-1)$．

当 n 是偶数 $2k$ 时，我们考虑方程 $x^2 + y^2 = 5^{k-1}$ 的整数解．5^{k-1} 的所有因子都是 5 的乘幂，所以每个因子都有 $4k_1+1$ 的形状．由于 5 的乘幂到 5^{k-1} 为止共有 k 个，所以整数解的个数是 $4(k-0) = 4k$．这些解总起来有 $2k$ 对互相倒换的解 (x, y) 和 (y, x)．既然 5^{k-1} 是奇数，所以 x 和 y 中一个是奇数，另一个是偶数，从而这 $2k$ 对解中每一对都刚好有一个解，其头一项是奇数，第二项是偶数，这个结果下面将要用到：

以 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 为心、以 $\frac{1}{2}\cdot 5^{(k-1)/2}$ 为半径的圆周上，每个格子点 (p, q) 都是方程 $\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + (q-0)^2 = 5^{k-1}/4$ 的一个有序整数解，反之亦然．这里我们强调"有序"，是因为

$$\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 - (q-0)^2 = 5^{k-1}/4$$

这个关系并不自动蕴涵$\left(q-\frac{1}{2}\right)^2+(p-0)^2=5^{k-1}/4$。因此，上述方程的有序整数解的个数就是我们的圆周所经过的格子点的个数．可是，把方程两端乘以4．我们看出，每个有序解(p,q)也是方程$(2p-1)^2+(2q)^2=5^{k-1}$的有序解，反之亦然，但后者是形如$x^2+y^2=5^{k-1}$的方程．我们要找的解是$x=2p-1$，$y=2q$，即x是奇数，y是偶数．我们找到的每一个这样的解都产生我们的圆周上的一个格子点(p,q)．我们已经指出，$x^2+y^2=5^{k-1}$正好有$2k$个解(x,y)，其中x是奇数而y是偶数．所以我们的圆周必定正好通过$2k=n$个格子点．

当n是奇数$2k+1$时，我们考虑$x^2+y^2=5^{2k}$的整数解，这个方程的有序整数解的个数是

$$r(5^{2k})=4[(2k+1)-0]=4(2k+1)=8k+4,$$

一般说来，这些解总起来可以分为若干组，每一组有八个解：(x,y)，$(x,-y)$，$(-x,y)$，$(-x,-y)$，(y,x)，$(y,-x)$，$(-y,x)$，$(-y,-x)$．如果出现零，例如$x=0$，那么$x=-x$，这一组就只有四个解．还有，如果$x=y$，这一组中也只有四个解．

就我们讨论的情形而言，5^{2k}是奇数，所以x和y中一个是奇数，另一个是偶数，因而不可能有$x=y$．不过，零是可以出现的，得到下面这一组解：

$$(0,5^k),\ (0,-5^k),\ (5^k,0),\ (-5^k,0).$$

因此，我们的 $8k+4$ 个解 (x,y) 可以分为 k 组，每组有八个解，另外还有一组四个解。

现在，以 $\left(\frac{1}{3},0\right)$ 为心、以 $\frac{1}{3}5^k$ 为半径的圆周上，每个格子点 (p,q) 正好就是方程

$$\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+(q-0)^2=\frac{5^{2k}}{9}$$

或
$$(3p-1)^2+(3q)^2=5^{2k}$$

的一个有序整数解，后一方程是形如 $x^2+y^2=5^{2k}$ 的方程．这一次我们要找的解是 $x=3p-1$，$y=3q$，即是第一项模 3 同余于 -1，第二项被 3 整除．我们将证明，上述方程的 k 组解的每一组八个解中正好有两个这样的解，而单独那一组四个解中正好有一个这样的解，所以总起来有 $n=2k+1$ 个这样的解，这就是说，我们的圆周上也正好有这样多个格子点．

注意：

$$5^{2k}=25^k\equiv 1^k\equiv 1 \pmod 3$$

而一个平方数是模 3 同余于 0 或 1 的，所以 x^2 和 y^2 中必定有一个模 3 同余于 1，而另一个模 3 同余于 0．让 x 和 $-x$ 表示一组八个解中被 3 整除的那些项．(我们可以把这组中一个解记为 (x,y)，其余的记号则由此确定为 $(-x,y)$ 等等．) 这时，y 和 $-y$ 中恰好有一个模 3 同余于 -1．为确定起见，

假设这是 y，于是，只有 (y,x) 和 $(y,-x)$ 这两个解才是第一项模 3 同余于 -1 而第二项模 3 同余于 0 的．在单独那一组四个解中，$(-5^k,0)$ 和 $(5^k,0)$ 中恰好有一个是所要的那种解．

3．布若金定理 前面考虑的那些问题，如果把圆换成正方形，就会呈现出完全不同的面貌．1957 年，布若金（George Browkin）证明了：对于每个自然数 n，平面上有一个正方形，其内部刚好含有 n 个格子点．这里给出的布若金的证明，是经过谢尔宾斯基（Sierpinski）和辛泽尔修改的．

我们仍然把格子点排成一个序列 $p_1,p_2,p_3,\cdots$．为此，我们利用函数

$$f(x,y)=\left|x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|+\left|x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|.$$

我们来证明，任何两个格子点的 f 值都不相同．

用反证法，假设有两个不同的格子点 (a,b) 和 (c,d)，使得 $f(a,b)=f(c,d)$．由于 $|z|$ 或者是 $+z$，或者是 $-z$，所以可以记 $|z|=pz$，这里 p 是 $+1$ 或 -1．因此，从方程 $f(a,b)=f(c,d)$ 中去掉绝对值符号，我们得到

$$p\left(a+b\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)+q\left(a\sqrt{3}-b-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=r\left(c+d\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)+s\left(c\sqrt{3}-d-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

其中 p,q,r,s 是 1 或 -1，把有理项和无理项分

开，注意 $s/\sqrt{3}=\sqrt{3}s/3$，我们得到

$$pa-p/3-qb-rc+r/3+sd$$
$$=\sqrt{3}(rd+sc-s/3-pb-qa+q/3).$$

两边要相等，每一边都得是零，所以

$$pa-qb-rc+sd+\frac{r-p}{3}=0,$$

$$rd+sc-pb-qa+\frac{q-s}{3}=0.$$

由于所有的参数都是整数，所以分数 $(r-p)/3$ 和 $(q-s)/3$ 也必定化为整数．但是，两个分子中每一个都是 2，0 或 -2，所以两个分子都只能是 0，从而 $p=r$，$q=s$，方程化为

$$p(a-c)+q(d-b)=0,$$
$$p(d-b)+q(c-a)=0.$$

把这两个方程各乘以 p 和 q 得到

$$p^2(a-c)+pq(d-b)=0,$$
$$pq(d-b)+q^2(c-a)=0.$$

相减得到

$$p^2(a-c)-q^2(c-a)=0$$

或
$$(a-c)(p^2+q^2)=0$$

但是，不管 p 和 q 是 1 还是 -1，p^2 和 q^2 都是 1，所以

$$2(a-c)=0,\qquad \text{即是}\quad a=c$$

这接着又得到 $b=d$，从而说明格子点 (a,b) 和 (c,d) 是相同的，矛盾．因此，任何两个格子点的 f 值都不相同．

f 有一个简单的几何解释．从格子点 $p(x,y)$ 到方程为 $x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}=0$ 的直线 L 所作垂线 d_1 的长度是

$$|d_1|=\left|\frac{x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+3}}\right|.$$

所以 $\left|x+y\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right|=2|d_1|$．同样，$\left|x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=2|d_2|$，这里 d_2 表示从 $p(x,y)$ 到方程为 $x\sqrt{3}-y-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$ 的直线 M 所作的垂线．

注意，直线 L 和 M 在点 $R\left(\frac{1}{3},0\right)$ 处相交成直角，所以 $f(x,y)=2|d_1|+2|d_2|$ 代表从 P 到 L 和 M 作垂线而得的矩形 $PQRS$ 的周长．一般说来，f 的值随着 $P(x,y)$ 远离交点 R 而增大，所以我们看出，R 附近有一个格子点 p_1，使相应矩形的周长最小，并且由于任何两个格子点的 f 值都不相同，所以按照 f 值增大的顺序就可以使格子点排成序列 $p_1,p_2,p_3,\cdots$．

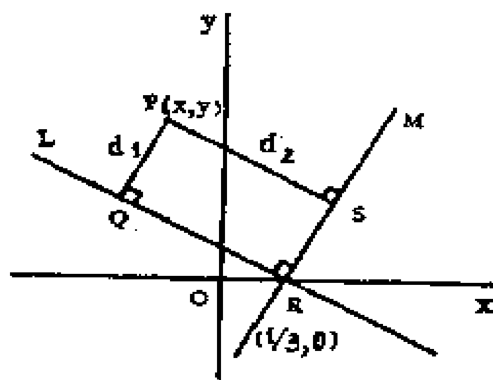


图 11-2

让我们用记号a_n来表示格子点p_n相应的f值。再命

$$h(x,y)=x(1+\sqrt{3})+y(\sqrt{3}-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$g(x,y)=x(1-\sqrt{3})+y(1+\sqrt{3})-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

考虑四条直线

$$h(x,y)=\pm a_{n+1},\quad g(x,y)=\pm a_{n+1}.$$

显然，与$h(x,y)$有关的两条直线彼此平行，另外两条直线也彼此平行. 由这些直线的方程比较它们的斜率，我们看出，这两对平行直线是互相垂直的，所以构成一个矩形，实际上是一个正方形. 这个事实请读者自行验证，只须比较这两对平行线在两坐标轴上的截距即可.

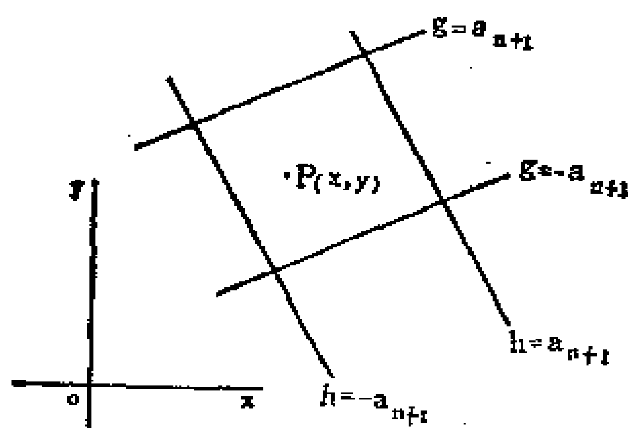


图 II-3

现在，如果格子点(x,y)相应的值$h(x,y)$满足$-a_{n+1}<h(x,y)<a_{n+1}$，即是$|h(x,y)|<a_{n+1}$，

则点 (x, y) 落在平行线 $h(x, y)=a_{n+1}$ 和 $h(x, y)=-a_{n+1}$ 之间的条状区域内，反之亦然．注意，$g(x, y)$ 中 x 的系数是负的，同样可见，格子点 (x, y) 落在平行线 $g(x, y)=a_{n+1}$ 和 $g(x, y)=-a_{n+1}$ 之间的充要条件是：$-a_{n+1}<g(x, y)<a_{n+1}$，即是 $|g(x, y)|<a_{n+1}$．于是，点 (x, y) 落在上述正方形内的充要条件是：$|h(x, y)|<a_{n+1}$ 且 $|g(x, y)|<a_{n+1}$．

既然对任何实数 a, b, c，不等式组 $|a|<c$ 和 $|b|<c$ 等价于一个不等式

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<C$$

（见练习 1），所以我们上面的两个不等式

$$|h(x, y)|<a_{n+1} \text{ 和 } |g(x, y)|<a_{n+1}$$

就等价于

$$\left|\frac{h(x, y)+g(x, y)}{2}\right|+\left|\frac{h(x, y)-g(x, y)}{2}\right|<a_{n+1}.$$

把 $h(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的表达式代入并加以简化，容易看出，上式正好化为

$$f(x, y)<a_{n+1}.$$

这就是说，格子点 (x, y) 落在上述正方形内的充要条件是：$f(x, y)<a_{n+1}$．按照格子点排列的次序，满足上述要求的格子点正好就是

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_n,$$

所以我们的正方形刚好含有 n 个格子点．

上述定理不仅对正方形成立，对于三角形、正五边形、椭圆以及其他一些图形也成立．事实上，辛泽尔和库里柯夫斯基甚至还能证明下述优秀定理：对于每个非空的平面有界凸形 C，对于每个自然数 n，平面上有一个图形，模样和 C 一样，其内部刚好含有 n 个格子点．

4．三维空间中的球面 我们可以把上述结果推广到三维空间中球面的情形，例如，对于每个自然数 n，存在一个球面，其内部正好含有 n 个格子点．这个事实的证明类似于平面上关于圆的相应定理的证明．现在，让我们对下述定理给出一个优美的证明作为本章的结尾．

库里柯夫斯基定理 对于每个自然数 n，三维空间中有一个球面，其表面上刚好有 n 个格子点．

这个定理是华沙的库里柯夫斯基（Thadée Kulikowski）在1958年证明的．他的证明要用到辛泽尔定理，这是我们前面证明过的．

对于已知的自然数 n，利用辛泽尔定理确定刚好通过 n 个格子点 (x,y) 的一个圆的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c.$$

既然 xy 平面上的格子点 (x,y) 就是 xyz 空间中的格子点 $(x,y,0)$，所以辛泽尔圆周上刚好含有三维空间中的 n 个格子点 $(x,y,0)$．

于是，库里柯夫斯基说，中心为 $(a,b,\sqrt{2})$，

半径为$\sqrt{c+2}$的球面上就刚好有n个格子点.事实上，球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-\sqrt{2})^2=c+2,$$

或

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-2z\sqrt{2}=c.$$

从辛泽尔定理知，a, b, c的值都是有理数（$a=\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$，$b=0$, c是某个适当的正有理数①），所以在上述方程中x, y, z的整数值使除了$-2z\sqrt{2}$外的每一项都取有理值. 因此，除了$z=0$外，任何整数x, y, z都不可能满足这个方程，这就是说，球面上的格子点全都落在它和xy平面的交集上. 令$z=0$得到这个交集，正好就是上述辛泽尔圆周

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c.$$

于是，球面上仅有的格子点就是这个圆周上的n个格子点. 证毕.

这个证明可以直接推广到任何维数的空间. 最后，我们指出，布若金也证明了：对任何自然数n，三维空间中存在一个方体，其内部刚好含有n个格子点.

---

①原文是"c是适当半径的平方".——译注.

练 习

1．证明：对任何实数 a,b,c，不等式组 $|a|<c$ 和 $|b|<c$ 等价于一个不等式

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c.$$

2．证明：对每个自然数 n，三维空间中存在一个球面，其内部恰好含有 n 个格子点．（提示：证明任何两个格子点到点（$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$）的距离都不相同，由此确定所有格子点的次序．）

3．证明：对任何自然数 n，如果平面上有一个以（a,b）为心的圆，其内部恰好含有 n 个格子点，则 a 和 b 不可能都是有理数．

4．证明：对每个自然数 n，平面上都有一个正方形，其边界上恰好有 n 个格子点．

参考文献及进一步的读物

〔1〕 W．Sierpinski, A Selection of Problems in the Theory of Numbers, Pergamon Press, New York, 1964.

〔2〕 A．Schinzel, Sur l'Existence d'un Cercle Passant par un Nombre Donné de

Points aux Coordonnées Entières, L'Enseignement Math., Series 2, Vol.4,(1958).

〔3〕 W.Sierpinski, Sur Ouelques Problèmes Concernant les Points aux Coordonnées Entières, L'Enseignement Math., Series 2, Vol. 4 (1958)

〔4〕 T. Kulikowski, Sur l'Existence d'une Sphère Passant par un Nombre Donné aux Coordonnées Entières, L'Enseignement Math., Series 2, Vol.5 (1959).

十二、递推关系

在这一章里，我们考虑靠递推关系来解决的两个问题．第一个很简单，几乎是不解自明的．第二个问题里出现的递推关系和生成函数，则往往产生一些意想不到的结果，真好象白手起家，一本万利．递推，是由一定情况推出结果的行之有效的技巧，是很值得探讨的．

1．赌徒荡产　我们的第一个问题在概率论史上是很有名的，叫做赌徒荡产．假定我们扔硬币赌钱：正面你赢我一分钱，背面我赢你一分钱；每扔一次我们每人都有$\frac{1}{2}$的概率获胜．首先，假定你有50分，我有20分；必要时夜以继日把比赛进行到底．我们要求出下述三种情况的概率：（1）我输光了，（2）你输光了，（3）比赛永不终止．

我们每人只要数一下自己的钱，就可以掌握到比赛进展的情况．让我们站在你的立场上来考虑问题，把数直线延长通过0，1，2，…，70，可以很方便地标出你手边有多少钱．开头，你在50的地方放个标记．你赢了第一回，就把这个标记朝前挪到51；你输了就挪回到49，依此类推．我们的第一个任务

是求出你的标记达到 70 的概率. 这就是说, 我们要知道在50开始而在 70 结束的概率. 当然, 在 49 开始而在 70 结束实质上是同一个问题. 因此, 让我们定义 p_k 表示从出发点 k 最终达到 70 的概率. 不论你是拿着 k 分钱开场, 还是在赌博过程中你掌握了 k 分钱, 从点 k 达到 70 的概率都是一样的. 从当前位置达到 70 的概率随着每扔一回硬币而变化. 如果你目前在 k 处, p_k 就表示最终在 70 处结束的概率, 不论在比赛过程中你是否在目前这个位置上来回拉锯. 扔了硬币之后, 你或者处于 $k+1$, 或者处于 $k-1$, 你达到 70 的新概率就或者是 p_{k+1}, 或者是 p_{k-1}.

现在, 从位置 k 出发赢得比赛的一个办法是首先移动到 $k+1$, 这件事发生的概率是 $\frac{1}{2}$, 由此获胜的概率是 p_{k+1}, 所以从 k 先走到 $k+1$而获胜的概率是 $\frac{1}{2}p_{k+1}$. 同样, 从 k 先移动到 $k-1$ 而获胜的概率是 $\frac{1}{2}p_{k-1}$. 从位置 k 出发只有这两种获胜的办法, 所以我们有递推关系

$$p_k=\frac{1}{2}p_{k+1}+\frac{1}{2}p_{k-1},$$

问题基本上就解决了.

乘以 2 再移项得到

$$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k,$$

这是一个一般的公式，结果

$$p_1 - p_0 = p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \cdots = p_{70} - p_{69}$$

让我们把这个常值差数记为 d. 把这 70 个差数加起来，除两项以外全部互相消去，所以得到

$$p_{70} - p_0 = 70d, \qquad d = \frac{1}{70}(p_{70} - p_0).$$

位置 70 和 0 都代表比赛终止. 在 0 处你没有剩下任何赌本，所以你没有机会达到 70，即是 $p_0=0$. 在 70 处我没有剩下任何赌本而你已经达到 70，所以 $p_{70}=1$，因此

$$d = \frac{1}{70}(1-0) = \frac{1}{70}.$$

结果，我们得到 $p_0=0$，$p_1=\frac{1}{70}$，$p_2=\frac{2}{70}$，…，$p_k=\frac{k}{70}$. 因此，你把我的钱全部赢去的机会是 $\frac{50}{70}$. 站在我的立场上分析这场比赛是完全一样的，所以我把你的钱全部赢到的概率是 $\frac{20}{70}$.

这样一来，我们之中一个把另一个扫光的概率是

$$\frac{50}{70} + \frac{20}{70} = 1.$$

于是，从概率论的观点来看，我们之中必然有一个使另一个倾家荡产；比赛永不终止的概率是 0. 这

是大大出人意料的，因为有无穷多种方式使我们的财产能够来回拉锯而谁也不至于倾家荡产。

2. 欧拉的一个问题 在凸五边形中画两条不交叉的对角线，结果把五边形的内部分成三个三角形，这可以按五种不同的方式进行。

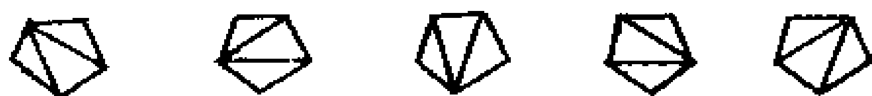


图 12-1

在凸六边形中可以按十四种不同的方式画三条不交叉的对角线，把六边形的内部分成三角形。我们在这一节里的问题是一个很难的问题，是十八世纪伟大的瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler）提出的：

把一个凸 n 边形用不交叉的对角线分成三角形，有多少种不同的方式？

处理数学问题时，记号恰当往往是非常有益的。如果用 c_n 表示所求（$n+2$）边形的分解方式数，例如对五边形有 $c_3=5$，对六边形有 $c_4=14$，等等，结果会表明我们的记号是恰当的。现在考虑凸（$n+3$）边形，它产生 c_{n+1} 种分解、我们把这个多边形记为 $A_1A_2A_3\cdots A_{n+2}A_{n+3}$。

对于任何一种分解，这个多边形的边 A_1A_{n+3} 都是该分解中某个三角形的一条边，这样一个三角形的第三个顶点就是 $A_2, A_3, \cdots A_{n+2}$ 中的一个。让 k 变

动经过 0,1,…, n 诸值，我们来算出使得第三个顶点是 A_{k+2} 的那些分解的个数，把所有这样得到的分解个数加起来就得到 c_{n+1}.

从 A_1 和 A_{n+3} 到顶点 A_{k+2} 的两条对角线构成一个三角形，把我们的 $(n+3)$ 边形分成两个多边形，一个是 $(k+2)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{k+2}$，另一个是多边形 $A_{k+2}A_{k+3}\cdots A_{n+3}$，后面这个多边形有 $n+3-(k+1)=n-k+2$ 个顶点.因此，这两个多边形本

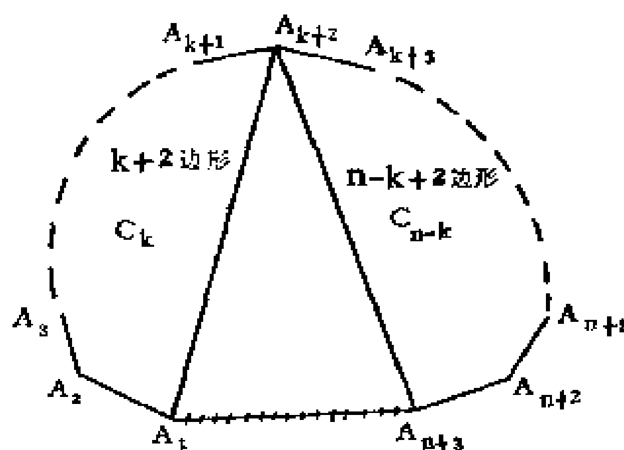


图 12-2

身可以各有 c_k 和 c_{n-k} 种分解方式.一个多边形的这 c_k 种分解方式中的每一种和另一个多边形的那 c_{n-k} 种分解方式中的每一种，合起来产生原来的 $(n+3)$ 边形的一种分解方式.于是，把 A_1 和 A_{n+3} 这两个顶点与 A_{k+2} 联结起来，总共产生原来的 $(n+3)$ 边形的 c_kc_{n-k} 种分解方式，对 $k=0,1,2\cdots,n$ 这些值求和，我们得到总数 c_{n+1} 为

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} .$$

不过，这里我们走得快了一点，因为符号 c_0 还没有定义．在上面的和式中这个符号只出现两次，分别含在 $k=0$ 和 $k=n$ 的两项 c_0c_n 与 c_nc_0 中 这两种情形图示如下：

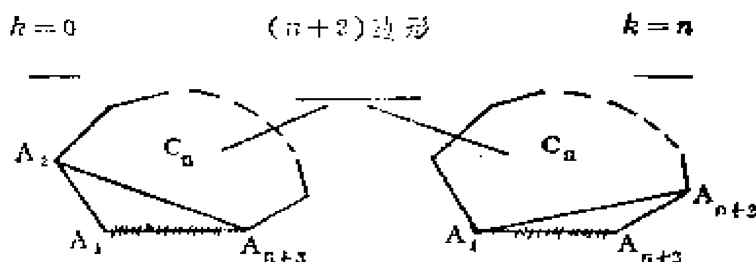


图 12-3

每种情形都各有一个子多边形消失，而另一个子多边形是 $(n+2)$ 边形；两种情形的分解数都正好是 c_n．因此，我们应该定义 $c_0=1$．顺便指出，还有 $c_1=1$，因为三角形没有对角线，所以只有一种分解方式，即是不进行分解．

我们现在有一个相当复杂的递推关系

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} ,$$

为了求解，我们要求助于生成函数．让我们定义 C 表示 x 的一个无穷级数，其系数是未知数 c_0, c_1，等等，即是

$$C = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

或

$$C=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

现在让 C 自乘，则乘积中 x^n 的系数就是：

$$c_0c_n+c_1c_{n-1}+c_2c_{n-2}+\cdots+c_nc_0,$$

所以我们有

$$C^2=\sum_{n=0}^{\infty}(c_0c_n+c_1c_{n-1}+c_2c_{n-2}+\cdots+c_nc_0)x^n.$$

按照我们的递推关系，这就给出

$$C^2=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n.$$

遍乘以 x 得到

$$xC^2=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1}.$$

这个方程的右端正好是 $c_1x+c_2x^2+\cdots$，除了 C 中第一项 c_0 为 1 外，与 C 完全一致，所以

$$xC^2=C-1 \quad 或 \quad xC^2-C+1=0.$$

对 C 的这个二次方程求解，我们得到

$$C=(1\pm\sqrt{1-4x})/2x.$$

二项式定理给出

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-4x)+\cdots,$$

所以，取 + 号所得的表达式 $(1+\sqrt{1-4x})/2x$ 中第一项为 $\frac{1}{x}$；但 C 中不含带有 $\frac{1}{x}$ 的项，所以这个

表达式与本题无关，C 应由

$$C=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1}{2x}\left[1-\sqrt{1-4x}\right]$$

给出，这就得到

$$C=\frac{1}{2x}\left\{-\frac{1}{2}(-4x)-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(-4x)^2+\cdots\right\},$$

方括弧中每一项前面都有负号. 由于在 C 的级数定义中 x^n 的系数是待求的数 c_n，所以我们有

$$c_n x^n=\frac{1}{2x}\left\{-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left[\frac{1}{2}-(n+1)+1\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}\times(-4x)^{n+1}\right\}.$$

于是

$$c_n=\frac{1}{2}\left\{-(-1)^n\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left[(n+1)-1-\frac{1}{2}\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}\times(-1)^{n+1}4^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{2n+2}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}2^{2n+2}\right\}$$

$$=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}2^n.$$

把这个分数上下各乘以 $n!$，我们得到一个匀称的

表达式

$$c_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{(n+1)!n!}[(2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot3)\cdots(2\cdot n)]$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)[2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots2n]}{(n+1)!n!},$$

即是

$$c_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

练　　习

1．生成函数可以用来解决许多递推关系．我们详细地来考虑一个例子．

如果 f_n 表示 n 条直线把平面分成的区域数(这些直线中任何两条不平行，任何三条不共点)，我们得到

$$f_{n+1}=f_n+(n+1),\qquad f_0=1.$$

定义 $F(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_nx^n+\cdots$，我们得到 $x\cdot F(x)=f_0x+f_1x^2+\cdots+f_{n-1}x^n+\cdots$．相减得到

$$(1-x)F(x)=f_0+(f_1-f_0)x+(f_2-f_1)x^2$$
$$+(f_n-f_{n-1})x^n+\cdots$$
$$=1+1\cdot x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$
$$=1+x(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots)$$
$$=1+x(1-x)^{-2},$$

所以 $F(x)=(1-x)^{-1}+x(1-x)^{-3}$。左边 $F(x)$ 中 x^n 的系数按定义是 f_n，应该等于右边 x^n 的系数：

$$f_n=[x^n\text{ 在 }(1-x)^{-1}\text{ 中的系数}]$$
$$+[x^n\text{ 在 }x(1-x)^{-3}\text{ 中的系数}].$$

（注意，后面这一项正好是 x^{n-1} 在 $(1-x)^{-3}$ 中的系数．）利用二项式定理就可得到所要的结果，为此，记住一些经常碰到的展式是很有用的，例如

$(1-x)^{-1}$，$(1+x)^{-1}$，$(1-x)^{-2}$，$(1+x)^{-2}$，$(1-x)^{-3}$，$(1+x)^{-3}$，等等，就目前考虑的问题而言，我们有 $f_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$ ①，即是

$$f_n=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

试用这种方法来考虑递推关系 $f_{n+1}=f_n+2n$，$n=1,2,3\cdots$，$f_0=1$，$f_1=2$。

2．在凸 n 边形中画不交叉的对角线把它分解为三角形．试问：可以分解为多少个三角形？可以画出多少条对角线？

3．一只苍蝇从立方体 $ABCDEFGH$ 的顶点 A 出发，沿立方体诸棱爬行；苍蝇从某个顶点处决

---

①为了得到这个结果而利用生成函数似有牛刀之感．事实上，由递推公式可直接得到

$$f_n=f_{n-1}+n=f_{n-2}+n+(n-1)=\cdots$$
$$=f_0+n+(n-1)+\cdots+1=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

——译注．

定沿某条特定的棱前进的概率是$\frac{1}{3}$. 假设顶点 F 和 G 用粘蝇纸盖住. 试问：苍蝇在顶点 G 处被粘住的概率是多少？苍蝇在 F 处被粘住的概率是多少？苍蝇不被粘住的概率是多少？

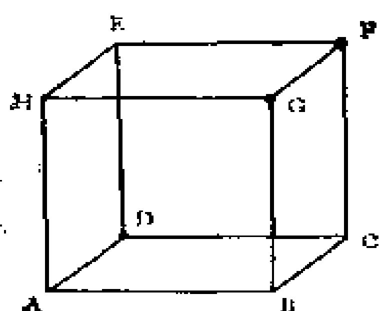


图 12-4

4. 利用生成函数来确定著名的费波纳契（Fibonacci）序列的第 n 项. 这个序列定义为

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ f_1=f_2=1,\ n\geqslant 1.$$

（提示：定义 $F_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n$，确定 $xF_{(x)}$ 及 $x^2F(x)$，求出 $(1-x-x^2)F(x)$ 之值. 这样得到的公式叫做比内（Binet）公式.）

5. 连续掷一颗骰子所得诸值的累计数排成一个序列. 试问：一个指定的整数 n 出现在这个序列中的概率是多少？

6. 在圆周上取 $2n$ 个点，用 n 条不交叉的弦把这些点成对地联结起来. 试问：可以有多少种联法？

参考文献及进一步的读物

〔1〕 Dynkin and Uspenskii, Random

Walks, Heath, Boston, 1963.

〔2〕 Yearbook 28 of the NCTM, Enrichment Mathematics for High Schools, 1963.

十三、普勒数，超普勒数以及其它有关的数

1. 普勒数和超普勒数 1926年，普勒(P. Poulet)发表了到五亿为止的奇假素数表，1938年他又把这个表扩充到十亿．因此，假素数被叫做普勒数．我们知道，假素数① 是一个合成数 n，使得 $n\mid 2^n-2$．下面证明 2047 是一个普勒数：

首先，$2047=2^{11}-1$，并且 $2047=11\cdot186+1$，所以

$$
\begin{aligned}
2^{2047}-2&=2^{11\cdot186+1}-2=2(2^{11\cdot186}-1)\\
&=2[(2^{11})^{186}-1^{186}]=2(2^{11}-1)(\cdots)\\
&=2(2047)(\cdots)
\end{aligned}
$$

这个普勒数具有下述性质：它的所有因子 d 也都满足普勒数的定义关系 $d\mid 2^d-2$．因为，2047 的素数分解是 $23\cdot89$，可见 2047 的因子就是这两个素数，从而费马（Fermat）小定理保证这两个素因子都满足 $d\mid 2^d-2$．一个普勒数，如果它的所有因子 d 都满足 $d\mid 2^d-2$，就叫做超普勒数．我们已经

① 见第一章——原注．

知道，费马小定理保证了所有素因子满足这个关系，所以我们可以对超普勒数下一个等价的定义：一个普勒数，如果它的合成因子也都是普勒数，就叫做超普勒数．

并非所有的普勒数都是超普勒数．例如，普勒数 $561=3\cdot 11\cdot 17$，所以 33 是它的一个因子，但是，$33\nmid 2^{33}-2$．为了看出这一点，注意，$2^{10}=1024=11\cdot 93+1\equiv 1\pmod{11}$，所以 $2^{30}\equiv 1\pmod{11}$．可是，$2^3\equiv 8\pmod{11}$，所以 $2^{33}\equiv 8\pmod{11}$，$2^{33}-2\equiv 6\pmod{11}$．因此，$11\nmid 2^{33}-2$，从而 $33\nmid 2^{33}-2$．于是，普勒数有的是超普勒数，有的则不然．原来，不论是普勒数还是超普勒数，每种都有无穷多个．

1936 年，美国数学家雷默尔（D. H. Lehmer）证明，存在无穷多个普勒数，每一个都只有两个素因子，例如 2047，从而保证了有无穷多个超普勒数．另一方面，任何偶数都不可能是超普勒数，而比格尔（Beeger）定理（1951）断定有无穷多个偶普勒数．现在让我们证明：所有超普勒数都是奇数．

假若不然，偶数 $2n$ 是超普勒数，这时我们有

(1) $2n|2^{2n}-2$，(2) 对于因子 n 也有 $n|2^n-2$．把(1)遍除以 2 可见，$n|2^{2n-1}-2$，所以 n 必定是奇数．因此，关系(2)，即是 $n|2(2^{n-1}-1)$ 将给出 $n|2^{n-1}-1$．从而，我们看出，n 整除差数$(2^{2n-1}-1)$

$-(2^{n-1}-1)$（因为 n 整除每一项），即是

$$n \mid 2^{2n-1}-2^{n-1} \quad 或 \quad n \mid 2^{n-1}(2^n-1).$$

由于 n 是奇数，所以 $n \mid 2^n-1$. 由于 n 也整除 2^n-2，所以它必须整除两者之差，即是整除 1. 从而，$n=1$，$2n=2$. 于是，素数 2 是超普勒数，因而是普勒数. 但是，按定义，普勒数都是合成数，所以 2 不可能是普勒数.

2，**其他有关的数**　费马小定理说，素数 n 整除 a^n-a，不论 a 是什么整数. 当整数 a 与 n 互素（即是 $(a,n)=1$）时，我们有

$$n \mid a^n-a=a(a^{n-1}-1)，所以 n \mid a^{n-1}-1.$$

一个合成数 n，如果对于任何与 n 互素的 a 都满足 $n \mid a^{n-1}-1$，则称为卡迈克尔数，因为这是卡迈克尔 (Robert Carmichael) 于 1909 年首先考虑的. 显然，绝对假素数（即是一个合成数 n，使得对所有整数 a 满足 $n \mid a^n-a$）都是卡迈克尔数. 反过来也对，这就说明卡迈克尔数与绝对假素数是一回事.

还有一些合成数 n，使得只要 $(a,n)=1$ 就有 $n \mid a^{n-2}-a$，例如 $n=195$ 就是这样的数. 事实上，195 的素分解是 $3\cdot5\cdot13$，这些素数每一个都整除 $a^{193}-a$，不论 a 是什么整数，我们考虑素数 5 的情形，其余的类似.

$$193=(5-1)\cdot48+1=4\cdot48+1,$$

所以

$$a^{193}-a=a^{4\cdot 48+1}-a=a[(a^4)^{48}-1^{48}]$$
$$=a(a^4-1)(\cdots)=(a^5-a)(\cdots).$$

由于 5 是素数，费马小定理给出 $5\mid a^5-a$，从而保证 $5\mid a^{193}-a$.

如果 a 与 n 互素，则关系

$$n\mid a^{n-2}-a=a(a^{n-3}-1)$$

给出 $n\mid a^{n-3}-1$. 大于 3 的自然数 n（不只是合成数），如果满足条件

$$(a,n)=1 \text{ 蕴涵 } n\mid a^{n-3}-1,$$

则称为 *D 数*，这是莫禾（D. C. Morrow）在 1951 年研究的. 我们来证明奇素数的三倍总是一个 D 数，这就表明 D 数有无穷多.

奇素数 $p=3$ 单独考虑. 这时 $n=3p=9$，我们要证明：对于所有的整数 a，只要 $(a,9)=1$ 就有 $9\mid a^6-1$. 由于 a 和 9 互素，所以我们有

$$a\equiv\pm1,\ \pm2,\ \pm4 \pmod 9.$$

在每种情况下我们都容易验证 $a^6\equiv1 \pmod 9$，即所求证.

现在假设 $n=3p$，其中 p 是大于 3 的奇素数. 我们来证明：

$$(a,n)=(a,3p)=1 \text{ 蕴涵 } n=3p\mid a^{3p-3}-1.$$

由于 $(a,3p)=1$，所以 a 不是 3 的倍数. 于是 $a\equiv\pm1 \pmod 3$，$a^2\equiv1 \pmod 3$，从而对所有自然数 k

有 $a^{2k}\equiv 1 \pmod 3$. 这就是说, a 的所有偶数次幂都模 3 同余 1. 由于 p 是奇数,所以 $3p-3$ 是偶数. 从而 $a^{3p-3}-1$ 被 3 整除.

由于 p 大于 3 而 p 是素数, 所以 $(3,p)=1$. 于是, 如果 3 和 p 每一个都整除 $a^{3p-3}-1$, 则其乘积 n 也是如此. 为了完成我们的证明, 只需证明 p 整除 $a^{3p-3}-1$, 我们有

$$a^{3p-3}-1=(a^{p-1})^3-1^3=(a^{p-1}-1)(\cdots).$$

由于 $(a,p)=1$, 据费马小定理有 $p\mid a^{p-1}$, 证毕.

1962 年, 马柯夫斯基(A. Makowski)证明: 对所有自然数 $k\geqslant 2$ 都存在无穷多个合成数 n, 使得

$$(a,n)=1 \text{ 蕴涵 } n\mid a^{n-k}-1.$$

对于 $k=3$, 这个定理肯定了存在无穷多个合成 D 数, 对于 $k=2$, 这个定理断定存在无穷多个合成数 n, 使得

$$(a,n)=1 \text{ 蕴涵 } n\mid a^{n-2}-1.$$

对于这样的 n, 我们看出, 只要 $(a,n)=1$, 则 $n\mid a^{n-1}-a$. 我们还可进一步断定:存在无穷多个合成数 n, 使得 $n\mid a^{n-1}-a$ 对所有整数 a 都成立,不论 a 与 n 是否互素. 我们来证明: 若 p 是奇素数, 则 $n=2p$ 就是这样的数.

a 和 a^{n-1} 显然同为奇数或同为偶数. 所以 $2\mid a^{n-1}-a$. 由于 p 是奇素数, 我们有 $(2,p)=1$, 所以, 只要 2 和 p 都整除 $a^{n-1}-a$, 则 n 亦然. 既然

$$a^{p-1}-a=a^{2p-1}-a=a(a^{2p-2}-1)=a[(a^{p-1})^2-1^2]$$
$$=a(a^{p-1}-1)(a^{p-1}+1)$$
$$=(a^p-a)(a^{p-1}+1),$$

而费马小定理给出 $p\mid a^p-a$，证毕.

3. 梅森纳数以及有关的数 $M_n=2^n-1$这些数叫做梅森纳数，这是用一位法国牧师梅森纳(Marin Mersenne，1588—1648) 的名字来命名的. 梅森纳和当时一些主要的学者有过大量的通信，这在科技刊物还不存在的那个时代，对于传播重要的数学结果做了巨大的贡献. 我们在第十章里曾经指出，在欧几里德 (Euclid) 计算偶完美数的公式里就已经有梅森纳数了：

如果 2^n-1 是素数，则

$m=2^{n-1}(2^n-1)$ 是完美数.

十八世纪的欧拉 (Euler) 证明了逆定理也对，所以寻求偶完美数的问题就等价于求梅森纳素数的问题.

如果 M_n 是素数，则 n 也是素数，这是一个容易的练习. 因此，人们往往以为逆命题也对. 但是，我们已经看到，$2^{11}-1$ 是一个假素数 2047. 梅森纳本人曾经宣称：当 $n=2,3,5,7,13,17,31,67,127,257$ 时，M_n 是素数；对于所有其他的素数 $n<257$①，

①原文是 $n\leqslant 257$. ——译注.

M_n 则是合成数．后来的研究表明，他的断言是不对的：在第一种情形里，他本来应该把 $n=19,61$，89 和 107 包括进去而把 $n=67$ 和 257 排除在外的．

由于梅森纳数与完美数之间的关系，人们对梅森纳数发生兴趣，所以不难理解，自从人们开始记载这种结果以来，被发现的最大素数的世界记录总是一个梅森纳素数．素数 $M_{127}=2^{127}-1$ 是一个 39 位的数字，从1914 年起保持着世界纪录的称号，直到五十年代初，仅仅在几个月的时间里，这个世界记录就不断被刷新：M_{521}，M_{607}，M_{1279}，M_{2203}，直到M_{2281}，最后这个是一个 687 位的数字．这些初步结果的涌现是电子计算机的功劳，此后又完成了许许多多分解因子的工作，进一步发现了七个梅森纳素数，即是 M_{3217}，M_{4253}，M_{4423}，M_{9689}，M_{9941}，M_{11213}，最后一个是 M_{19937}，这是塔克尔曼(Bryant Tuckerman)在 1971 年 3 月 4 日晚上发现的，从而把被发现的完美数扩大到 24 个．现在还不知道是否有无穷多个梅森纳素数．

按照定义，普勒数 n 整除 2^n-2．可是，拿关系密切的梅森纳数来说，根本不存在整数 $n>1$，使得 $n\mid 2^n-1$．下面的证明属于卓越的波兰数学家辛泽尔(A. Schinzel)．

他用反证法，假设 $n>1$ 整除 2^n-1．由于2^n-1 是奇数，所以它的因子 n 也必定是奇数．让 p 表示 n

的最小素因子，于是 p 也是奇数，因而

$$(p,2)=1.$$

按照费马小定理，我们有 $p|2^{p-1}-1$.

现在我们考虑使得 $p|2^m-1$ 的值 m. 我们已知 $m=p-1$ 是一个值，也许还会有 m 的一些值是小于 $p-1$的，让q表示 m的最小值. 于是我们有 $q\leqslant p-1$, $p|2^q-1$. 由于 p 是素数，它大于 1，所以要使 2^q-1 被 p 整除，必须 q 大于 1. 于是我们有

$$1<q\leqslant p-1, \quad 即 \quad 1<q<p.$$

如果我们能证明 q 整除 n，则 p 不是 n 的最小素因子（q 的任何素因子都比 p 小），从而得出矛盾.

我们仍然用反证法，假设 q 不整除 n. 这时我们将有

$$n=kq+r, \ k \text{ 是整数}, \ 0<r<q.$$

既然 $p|2^q-1$，即 $2^q\equiv1 \pmod p$，所以

$$2^n-1=2^{kq+r}-1=2^r(2^q)^k-1\equiv2^r-1 \pmod p.$$

由于 $n|2^n-1$ 而 $p|n$，所以 $p|2^n-1$，即是 $2^n-1\equiv0 \pmod p$. 因此，我们有

$$2^r-1\equiv0 \pmod p \quad 或 \quad p|2^r-1.$$

但是 $r<q$，这与 q 作为 m 的最小值矛盾.

不难证明：存在无限多个自然数 n，使得 $n|2^n+1$. 事实上，$n=3^k$，$k=0,1,2,\cdots$，就是这样的数. 证明留给读者，这是归纳法的简单应用.

最后，存在无限多个自然数 n，使得 $n|2^n+2$.

(例如 $n=2$，6 以及 66)，同时却没有任何自然数 $n>1$，使得 $n \mid 2^{n-1}+1$.

练　　习

1. 证明：对任何自然数 n，n^2+3n+5 不能被 121 整除.

2. 证明：如果 2^n-1 是素数，则 n 也是素数.(注意，逆命题不成立，例如 $n=11$)。

3. 证明：如果 m 和 n 是自然数，n 是奇数，则 2^n-1 和 2^m+1 总是互素的.

4. 如果正整数 n 整除 3^n-3 但不整除 2^n-2，试问 n 的最小值是什么?整除 2^n-2 但不整除 3^n-3 的最小的 n 是什么?

5. 试求整除 2^p+1 的所有素数 p.

6. 给了正整数 a，求一个合成数 n，使得 n 整除 a^n-a.

参考文献及进一步的读物

〔1〕W. Sierpinski, 250 Problems in Elementary Number Theory, American Elsevier, New York, 1970.

〔2〕———, A Selection of Problems in

The Theory of Numbers, Pergamon Press, New York, 1963.

〔3〕 —, Elementary theory of numbers, Warszawa (1964).

〔4〕 D. H. Lehmer, On the converse of Fermat's theorem, Amer. Math. Monthly, 43 (1936) 347–356.

附录

练习选解

一、一个古老的中国定理及费马

6. 显然 2^n-1 是大于 n 的奇数。由于 n 是奇合成数，故存在一对大于 1 的奇自然数 a 与 b，使得 $n=ab$. 于是

$$2^n-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1^b=(2^a-1)(\cdots).$$

这里 2^a-1 不会是 1，不然就会有 $a=1$；也不会是 2^n-1，不然就会有 $b=1$. 所以 2^n-1 是合成数.

n 是假素数，所以能整除 2^n-2，即 $2^n-2=nk$，k 为某自然数. 于是

$$2^{(2^n-2)}-1=2^{nk}-1=(2^n)^k-1^k=(2^n-1)(\cdots).$$

所以 2^n-1 整除 $2^{(2^n-2)}-1$，因而也就整除后者的二倍，即整除 $2^{(2^n-1)}-2$. 这就完全证明了 2^n-1 是假素数.

7. 令 $(2^m-1,\ 2^n+1)=d$，则 $2^m-1=kd$，$2^n+1=qd$，k 与 q 为自然数. 这就得出 $2^m=kd+1$，$2^n=qd-1$. 于是 $2^{mn}=(kd+1)^n=(qd-1)^m$. 按二

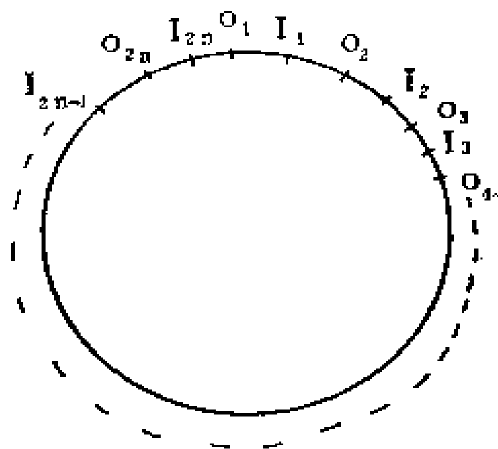
项式定理展开就可看出，存在整数 t 与 s，使得

$$(kd+1)^m = td+1,\ (qd-1)^m = sd-1,$$

(不要忘记，m 是奇数)．所以 $td+1=sd-1$，即 $2=d(s-t)$，这就表明 d 整除2．所以 $d=1$或 $d=2$．然而 2^m-1 是奇数，所以 d 也是奇数，故 $d=1$．

二、波　　萨

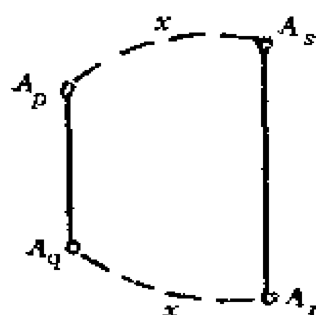
6．在 $4\times n$ 的棋盘上有两行外方格 $O_1,O_2,\cdots O_{2n}$，和两行内方格 $I_1,I_2,\cdots I_{2n}$．如果存在马回路，这 $4n$ 个方格就可以排成一个循环次序．



一匹马如果在外方格上，按走法必须走到一个内方格上，所以在上面的循环次序下，每个外方格后都必定是一个内方格，因而内外方格必然交替出现．

然而马每走一步就改变方格的颜色一次，于是在上述循环次序下，方格颜色也就交替变化，从而所有外方格为一种颜色，所有内方格为另一种颜色：这是不可能的．

10. 本题的解要用到下述事实：棱 A_pA_q，A_rA_s 平行的充要条件是 $p+q\equiv r+s \pmod{2n}$. 这很容易证明，只要注意，平行棱在正 $2n$ 边形上的截距相等，反之亦然.（即是 A_pA_q 和 A_rA_s 平行的充要条件是：一侧的 A_q 与 A_r 间的顶点个数 x 与另一侧的 A_p 间与 A_s 间的顶点个数相同）. 有了这点准备我们就可用反证法证明如下：



设 $A a_0 A a_1 A a_2 \cdots A a_{2n+1}$ 表示一条哈密尔顿回路，其任意二棱都不平行. 于是任何两条棱的脚标之和都不可能 mod $2n$ 同余，因而 $a_0+a_1, a_1+a_2, \cdots, a_{2n-1}+a_0$ 这 $2n$ 个数中，任何两个都不可能 mod $2n$ 同余. 这样一来，$0,1,2,\cdots, 2n-1$ 中，每一个都恰好是上面那 $2n$ 个数中唯一一个的余数. 所以有

$$(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+\cdots+(a_{2n-1}+a_0)$$

$$\equiv 0+1+\cdots+(2n-1)=\frac{(2n-1)(2n)}{2}=2n^2-n$$

$$\equiv -n\equiv n \pmod{2n}.$$

然而又有

$$(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+\cdots+(a_{2n-1}+a_0)$$

$$=2(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1})$$

$$=2(0+1+2+\cdots+2n-1) \quad (\text{按一定顺序})$$

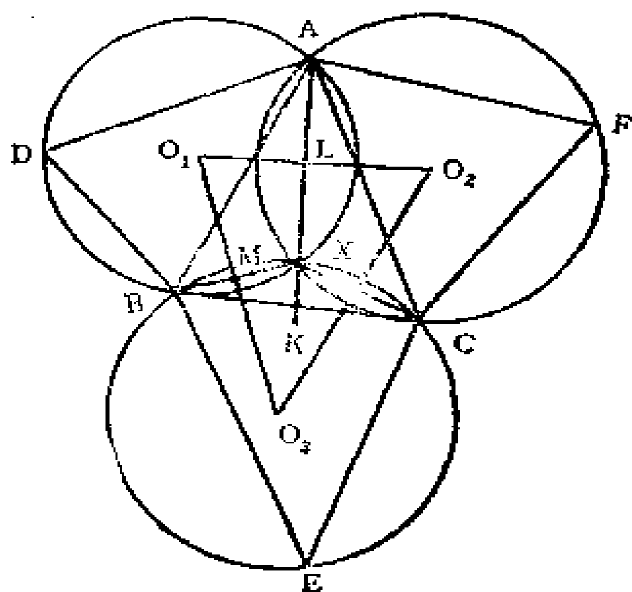
$=(2n-1)(2n)$

$\equiv 0 \pmod{2n}$.

这就是个矛盾，于是本题得证。

三、等边三角形

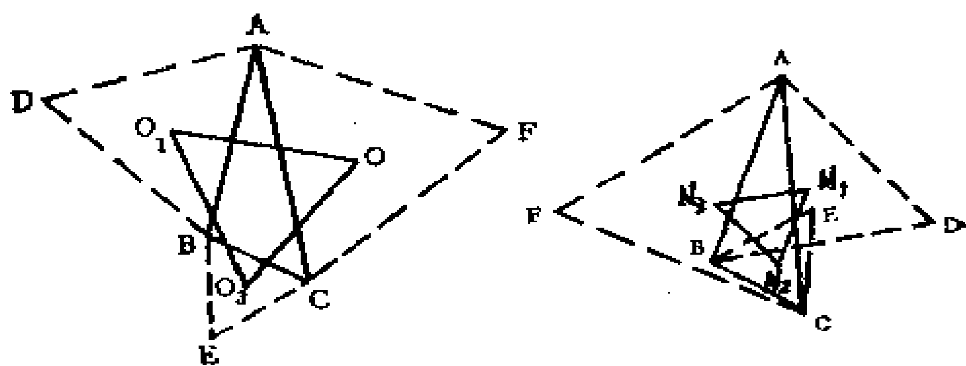
5．令圆 DAB 与 FAC 交于 X，则 $\angle AXB=180^\circ-D$，$\angle AXC=180^\circ-F$，所以 $\angle BXC=360^\circ-\angle AXB-\angle AXC=D+F=180^\circ-E$。于是 $\angle BXC$ 与 $\angle E$ 互补，这表明 $BXCE$ 共圆，所以三圆共点．又，相交二圆的联心线垂直于公共弦，故 O_1O_2 与 O_1O_3 分别垂直于 AX 与 BX，于是 $\angle O_2O_1O_3$ 便等于 AX 与 BX 之间从 AX 起顺



时针方向的夹角，因而也就等于圆内接四边形 $ADBX$ 在 X 处的外角．因此 $\angle O_2O_1O_3=D$．对 E 与 F 也有类似的结论．这样一来 $\triangle O_1O_2O_3$ 的三内角分别等于 D、E、F，如果 $D=E=F=60°$，那么 $\triangle O_1O_2O_3$ 就成了等边三角形．这就是拿破仑定理．

6．（假定对同一个 $\triangle ABC$）向外和向内两种情况都画出图来，并令所得的联心三角形分别为 $O_1O_2O_3$ 与 $N_1N_2N_3$．我们已经证明了外三角形是等边三角形．在向外画三角形的情形，若对 $\triangle AO_1O_3$ 用余弦定律就有

$$O_1O_3^2=AO_1^2+AO_3^2-2\cdot AO_1\cdot AO_3\times\cos\angle O_1AO_3.$$



依惯例令 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，那么 AO_1 便是 $\triangle ABD$ 的外接圆的半径，因为 $\triangle ABD$ 是边长为 c 的等边三角形，所以 AO_1 的长为此三角形高

的三分之二，即 $\frac{2}{3}(c\sqrt{3}/2)=c/\sqrt{3}$．最后得 $AO_1^2=c^2/3$．类似地可得 $AO_3^2=b^2/3$．

角 O_1AB 与 O_3AC 都是 $30°$，所以 $\angle O_1AO_3=\angle A+60°$．故

$$O_1O_3^2=\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2}{3}bc\cdot\cos(A+60°),$$

在向内画三角形的情形，对 $\triangle AN_1N_3$ 作一番类似的推导，我们得到

$$N_1N_3^2=\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2}{3}bc\cdot\cos\angle N_1AN_3.$$

既然"内图"可以由"外图"中诸等边三角形对 $\triangle ABC$ 的各相应边反射而得，所以 O_1 便反射成 N_1，等等．按我们的图的标记法，作这样的反射时，AO_1 绕点 A 旋转 $60°$ 而成为它的像 AN_1，这使 $\angle O_1AO_3$ 减小了 $60°$．同样，AO_3 旋转成 AN_3 时也把 $\angle O_1AO_3$ 减小了 $60°$．这样一来，$\angle N_1AN_3$ 就比 $\angle O_1AO_3$ 小 $120°$，因而等于 $A-60°$．要是原先 A 小于 $60°$（就象我们图中的那样），那末 $\angle N_1AN_3$ 就成了负角了．但这也没关系．将上面的两式相减，我们有

$$O_1O_3^2-N_1N_3^2$$

$$=\frac{2}{3}bc[\cos(A-60°)-\cos(A+60°)]$$

$$=\frac{2}{3}bc\cdot 2\cdot\sin A\cdot\sin 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}bc\cdot\sin A.$$

(注意：大小相等的负角与正角，其余弦都一样.)

所以

$$O_1O_3^2-N_1N_3^2=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}bc\cdot\sin A\right]$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\ \triangle ABC\text{ 的面积}.$$

这个结果与选什么边不相干，所以 $O_2O_3^2-N_2N_3^2$ 与 $O_1O_2^2-N_1N_2^2$ 也是同样大. 既然它们都一样大，O_1O_2、O_2O_3、O_3O_1 又都相等，那么显然 N_1N_2、N_2N_3、N_3N_1 也就相等了. 证毕.

7. 本题是第 6 题的推论. 边长为 x 的等边三角形的面积为 $\sqrt{3}\cdot x^2/4$，所以 $\triangle O_1O_2O_3=(\sqrt{3}/4)\times O_1O_3^2$，$\triangle N_1N_2N_3=(\sqrt{3}/4)\cdot N_1N_3^2$。根据第 6 题，我们有

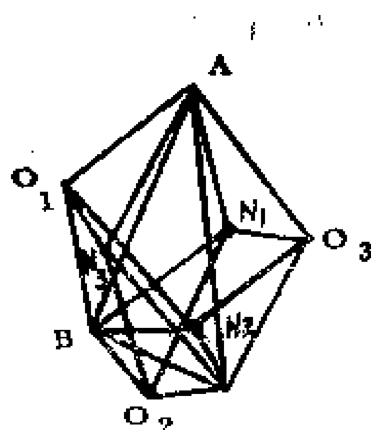
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot O_1O_3^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot N_1N_3^2=\triangle ABC,$$

这就是所要求证的.

8. 三角形 AO_1N_3 相似于 $\triangle ABC$，对应边之比为 $1/\sqrt{3}$. 前已证明 $AO_1=C/\sqrt{3}$，$AO_3=b/\sqrt{3}$（因而使得 $AN_3=b/\sqrt{3}$）；角 $O_3AO_1=A+60^\circ$，然而 $\angle N_3AO_1$ 刚好比它小 60°（把 AO_3 对 AC①

①这里的 AC 原文是 AB。——译注。

反射而得到 AN_3 时失去的)，所以 $\angle N_3AO_1=A$.



类似地，还有五个与 $\triangle ABC$ 相似的三角形，即 AN_1O_3、BN_1O_2、BN_2O_1、CN_2O_3、CN_3O_2，对应边之比也都是 $1/\sqrt{3}$，所以这些三角形彼此全等．作反射得到 N_1、N_2、N_3，同时也就得到六个等边三角形．AO_1N_1、BO_1N_1、AO_3N_3、CO_3N_3、BO_2N_2、CO_2N_2．其中每一个的边长都等于 $\triangle ABC$ 的一条边的 $1/\sqrt{3}$ 倍．所以由这六个全等三角形和六个等边三角形，我们有

$$AO_1=AN_1=BO_1=BN_1=N_3O_2=N_2O_3=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

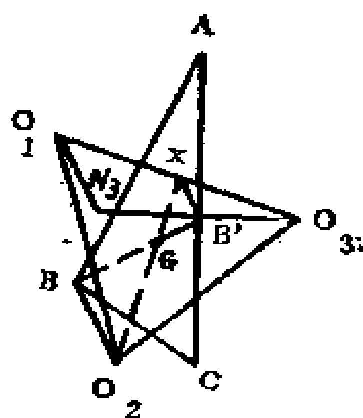
$$AO_3=AN_3=CO_3=CN_3=N_2O_1=N_1O_2=\frac{b}{\sqrt{3}},$$

$$O_1N_3=O_3N_1=BO_2=BN_2=CO_2=CN_2=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

你看，四边形 $O_1BO_2N_3$ 的对边相等了，所以是一个平行四边形．

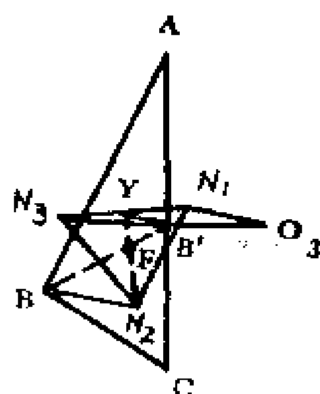
令 O_2X 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的中线，BB' 为 $\triangle ABC$ 的中线，并令它们交于 G．由于 O_3 对 AC 反射成了 N_3，所以 AC 是 O_3N_3 的垂直平分线，而且

O_3N_3 也是 AC 的垂直平分线．（O_3 与 A、C 等距离．）故 AC 的中点 B' 也是 O_3N_3 的中点．而 X 又是 O_1O_3 的中点．所以 $B'X$ 平行于 O_1N_3，长度为 O_1N_3 之半．由于 O_1N_3 与 BO_2 平行相等，所以 BO_2 平行于 $B'X$ 且长度为 $B'X$ 的二倍．这样



一来，$\triangle GB'X$ 与 $\triangle GBO_2$ 相似，对应边之比为1/2，因而 $O_2G=2\cdot GX$．然而 O_2X 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的中线，故 G 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的重心．同样，$GB=2\cdot GB'$，BB' 为 $\triangle ABC$ 的中线，所以 G 是 $\triangle ABC$ 的重心．

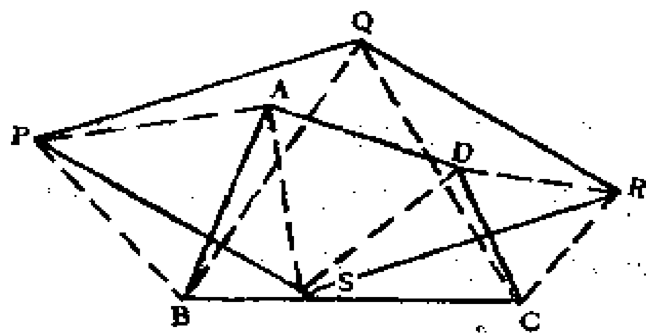
$BN_1O_3N_2$ 同样也是平行四边形．令 N_2Y 为 $\triangle N_1N_2N_3$ 的中线，仍令 BB' 为 $\triangle ABC$ 的中线且与 N_2Y 交于 F．在 $\triangle N_3O_3N_1$ 中，YB' 平行于 N_1O_3 且为 N_1O_3 长度之半，而 N_1O_3 与 BN_2 平行相等．因而 $\triangle YFB'$ 与 $\triangle FBN_2$ 相似，对应边之比为1/2．等等．结果，F 既是 $\triangle ABC$ 的重心也是 $\triangle N_1N_2N_3$ 的重心．于是 $F=G$．所以内、外拿破仑三角形有同一个重心，即中心．



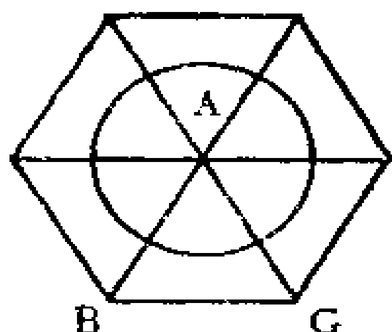
9. 在 H 中选取三条对角线构成(边长为 2 的)等边三角形. 三根大头针就扎在这三条对角线的中点上. 证明很容易.

10. 按题中所述将 H 每个顶点处的犄角标出来, 依次记成 1、2、3、4、5、6, 共三对相对的犄角. 若某一对中有一个犄角覆盖集 S 的点, 则与之相对的犄角就不能覆盖集 S 的点, 不然的话, S 的直径就会大于 1. 所以无论 H 是怎样盖住 S 的, 总有三个犄角没有覆盖住 S 的任何点; 这些犄角在三对相对的犄角中每对各有一个. 比如, 如果 1、3、5 盖住 S 的点, 则 2、4、6 角必定是空的. 试证: 无论哪三个犄角空着, 总有两个犄角, 中间只隔了一个犄角. 于是可以把 H 转动, 使得这两个就是要切掉的犄角. (证毕)

12. 对角线 AC 绕 B 旋转 $+60°$ 变成 PQ (A 变到 P, C 变到 Q); 绕 D 旋转同样角度则变成 SR. 所以 PQ 与 SR 必定平行相等, 这就是说, $PSRQ$ 是平行四边形.

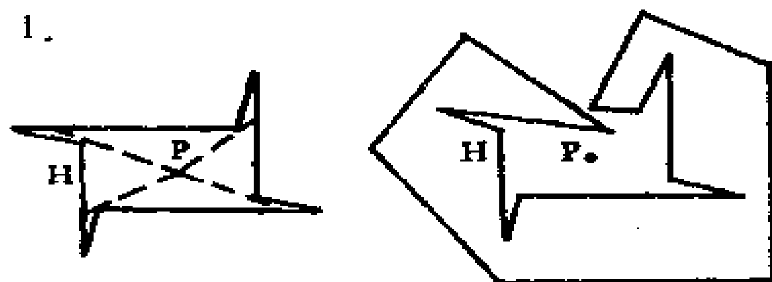


13．如图所示，使 $\triangle ABC$ 对其边作相继的反射，得到中心在 A 的正六边形．所说的那条曲线于是就产生出一条闭曲线，因为经六次反射后 $\triangle ABC$ 又还原了．这条闭曲线所包围的面积应为六边形面积之半，亦即 $\triangle ABC$ 面积的三倍，而与具体所用的平分曲线无关．若要平分曲线的长度最小，整条封闭曲线必须是圆．现在答案就很容易得到了．

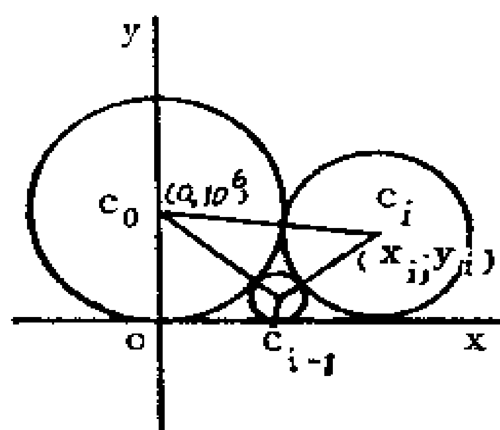


四、果园问题

1．



5．令 L 与 Z 分别为笛卡尔坐标架的 x 轴与原点，圆 C_i 的圆心为 c_i (x_i, y_i)，因而半径就是 y_i．一般地讲，我们有 $C_0C_i = 10^6 + y_i = \sqrt{x_i^2 + (y_i - 10^6)^2}$，由此得 $x_i^2 = 4 \cdot 10^6\ y_i$．因而 $x_{i-1}^2 = 4 \cdot 10^6 y_{i-1}$．所以，



由

$$C_{i-1}C_i = y_i + y_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

得到

$$(x_i - x_{i-1})^2 = 4\,y_i y_{i-1}.$$

于是有

$$(x_i - x_{i-1})^2\,4\cdot10^{12} = (4\cdot10^6 y_i)(4\cdot10^6 y_{i-1})$$
$$= x_i^2\,x_{i-1}^2,$$

或者

$$(x_i - x_{i-1})2\cdot10^6 = x_i\,x_{i-1}.$$

由于 $x_0 = 0$，这个关系式对 $i = 1$ 不成立．但此时根据毕达哥拉斯定理应有 $x_1^2 + (10^6 - 1)^2 = (10^6 + 1)^2$，由此得 $x_1 = 2\cdot10^3$．根据上面那个一般的关系式，我们有 $(x_2 - 2\cdot10^3)\cdot2\cdot10^6 = x_2\cdot2\cdot10^3$，由此得

$$x_2 = \frac{2\cdot10^6}{10^3-1}.$$

我们还有

$$\left(x_3 - \frac{2\cdot10^6}{10^3-1}\right)\cdot2\cdot10^6 = x_3\frac{2\cdot10^6}{10^3-1},$$

由此得 $x_3=2\cdot10^6/(10^3-2)$． 注意到 x_1 可写成 $2\cdot10^6/10^3$，便可以猜想是不是一般地会有 $x_i=2\cdot10^6/(10^3-i+1)$，我们试试用归纳法来证明这个结论吧．$i=1$ 时 $x_i=x_1=2\cdot10^3$，而公式给出的是 $2\cdot10^6/(10^3-1+1)$，结果相同．假设公式对 $i=k-1$ 成立，那么用上面的递推关系求解 x_k 就有

$$(x_k-x_{k-1})\cdot2\cdot10^6=\left(x_k-\frac{2\cdot10^6}{10^3-k+2}\right)\cdot2\cdot10^6$$

$$=x_k\cdot\frac{2\cdot10^6}{10^3-k+2}$$

于是得到

$$x_k=\frac{2\cdot10^6}{10^3-k+1},$$

这说明我们的公式对 k 仍旧是成立的，所以公式对所有的 i 都成立。

再用一下我们的第一个关系式 $x_i^2=4\cdot10^6y_i$，

得到 $$4\cdot10^6y_i=\frac{4\cdot10^{12}}{(10^3-i+1)^2},$$

于是 $$y_i=\frac{10^6}{(10^3-i+1)^2}.$$

只要 y_i 不大于 10^6，相应的圆就可以一直画下去． $y_i>10^6$ 时，分母 $(10^3-i+1)^2<1$；即 $(10^3-i+1)^2=0$。故有 $i=1001$。

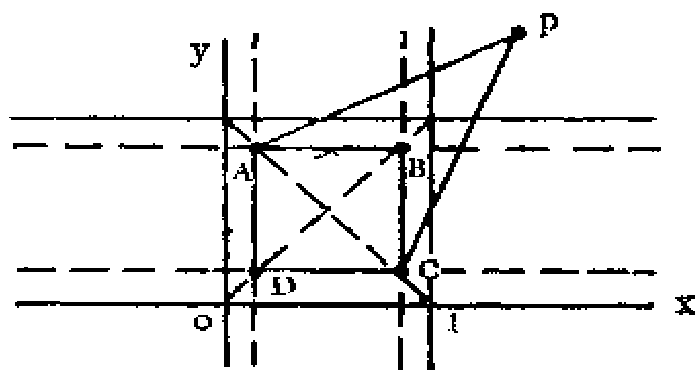
所以过了 C_{1001} 后就不能画圆了．不过，也许就连 C_{1001} 也太大了。万一 y_{1000} 正好等于10^6，就会出现这种情况．验算一下，我们就得到

$$y_{1000}=\frac{10^6}{(10^3-1000+1)^2}=10^6.$$

所以，虽然一般地讲可能有一个圆比 C_0 大，但此时此刻这种情况 C_{1000} 却是最末一个可画出的圆了．换句话说，画了 C_0 与 C_1 之后，还可以再画出 999 个圆来．

7．施尼勒曼定理表明，在我们的曲线上有四个点是正方形的顶点．由于这曲线是凸曲线，它的周长必定不小于正方形的周长．所以正方形周长小于 4，故其边长小于 1．

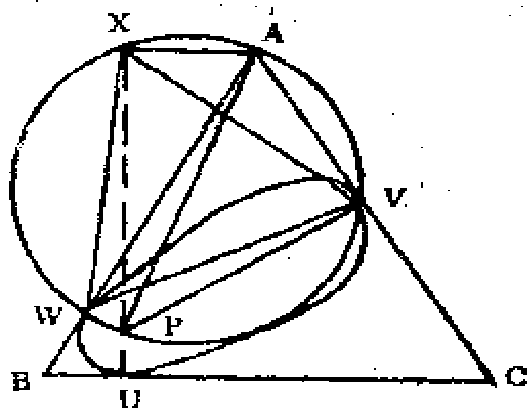
把曲线的内接正方形安放在单位格子正方形上，中心对准中心，边与边相平行，那么，这曲线就不含有任何格子点．因为内接正方形边长小于1，故内接正方形完全在单位正方形内．又因为曲线是凸的，它的任何点都不会在内接正方形各边延长线构成的两个条形区域之外，所以它不含格子点（比如说，若 P 属于我们这条曲线，那么 $\triangle PAC$ 就会



整个地含于我们这条曲线内，从而 B 不是边界点）.

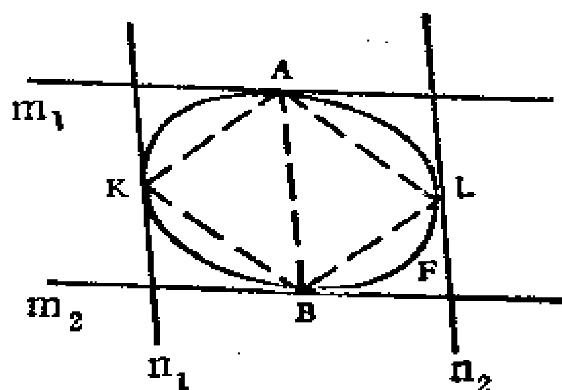
五、Δ 曲线

2．令 PW 与 PV 分别垂直于 AB、AC．联结 PA、PU、PX．由于 WV 在 A 与 X 点处都张成 $60°$ 的角，故 $AXWV$ 在同一圆周上．因 AP 在 W，V 处张成直角，故以 AP 为直径的圆经过 W、V、A，从而 X、W、P、V、A 共圆．由于 $\angle XAW=\angle XVW=60°$，故 $\angle XAC=120°$，所以 XA 与 CB 平行．然而 AP 是直径，所以 XP 垂直于 AX，于是 XP 垂直于 BC．据练习 1 的推广，我们得知 UP 垂直于 BC．于是 XPU 便是一条直线且垂直于 BC．这样一来，XU 便等于平行线 XA 与 BC 之间的距离，即 h．



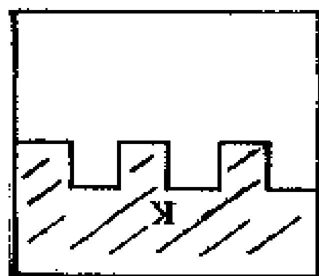
6．让 m_1、m_2 表示任意一对平行支撑线，并设

A、B 为每条线上的接触点．（如果 A 或 B 还有选择的余地，随便取一个接触点就行了．）让 n_1、n_2 表示在 AB 方向上的那一对平行的支撑线，K、L表示 n_1、n_2 上的两个接触点．



现在，这四条支撑线就把已知图形F围在一个平行四边形内了，而这个平行四边形又被 AB分成了两个小平行四边形．三角形 KAB 和 ABL 分别等于它们各自所属的平行四边形的一半，所以外接平行四边形是 $KBLA$ 的两倍，因而决不会大于 F 的二倍（因为 F 是凸的，所以 $KBLA$ 含于 F 内）．

六、组合分析的重要性

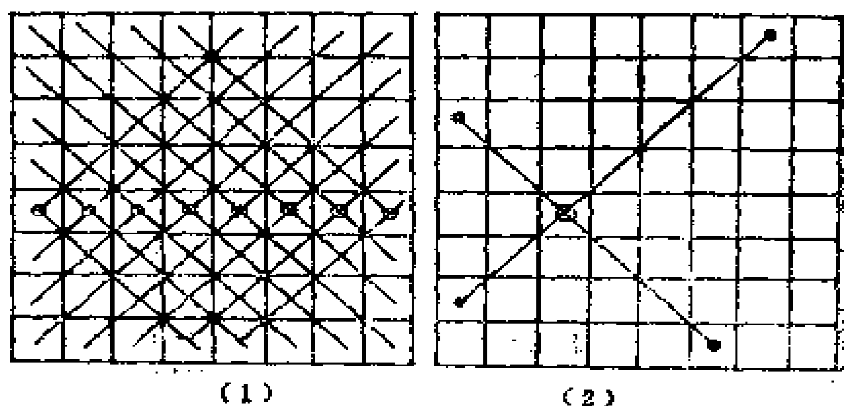


6．要证明本题可先证明：棋盘的一条水平分格线条或竖直分格线条穿过的骨牌数总是偶数．这很容易用反证法来证明．如果有一条分格线穿过奇数张骨牌，那么就会出现一个

铺满骨牌的区域 K，它包含奇数个方格．然而这是不可能的事：K 既然被整数张骨牌完全盖住，它必定有偶数个方格．

现在假定任何分格线都要穿过骨牌．由于一条分格线穿过的骨牌数是偶数，每条分格线至少要穿过两张骨牌，然而每张骨牌只能被一条分格线穿过，于是十条分格线就至少要有二十张不同的骨牌来穿过．但是 6×6 棋盘只能容下 $6^2/2=18$ 张骨牌．

7．在第4(或第5)横排的每个方格中放一匹象．图(1)表明，八匹象就够了．我们需要证明，少于八匹就不行．图(2)表明，任何一匹象都不可能走到外围4个以上同颜色的方格里．实地数一下，外围共有14个黑方格和14个白方格．因此两种颜色的方格各需至少4匹象．(假定象控制它所占据的方格．)



(1)　　(2)

8．令所说的一种走法中对角步数为 r，那么水

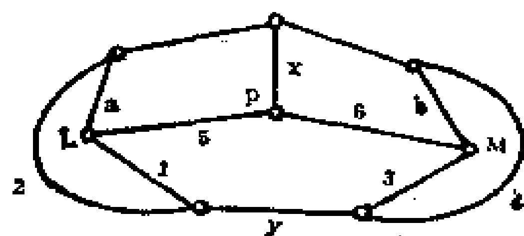
平步数与垂直步数为 $7-r$. 总步数为 $14-r$. 三类步法的排列方式共有

$$\frac{(14-r)!}{(7-r)!(7-r)!r!}$$

个（r 个步法属一类，$7-r$ 个步法属另一类，又有 $7-r$ 个步法属第三类）. r 从 0 变至 7 时相加，得 48639 种走法.

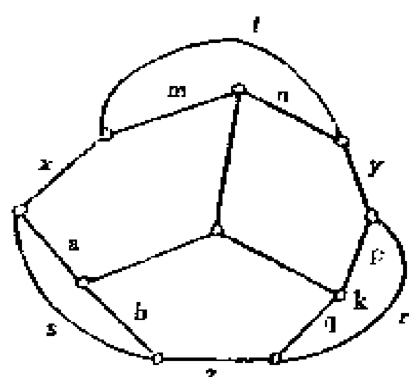
七、柯泽勒夫—格林贝格关于哈密尔顿回路的理论

1. （反证法）假设没有用 y 而用了 x，那么就必须有棱 1、2 与3、4，因而就划去了 a、b，不然就会出现一个"早熟的"三角形. 这样一来就必须有棱5、6，使回路的顶点 P 是 3 价顶点，这不可能.

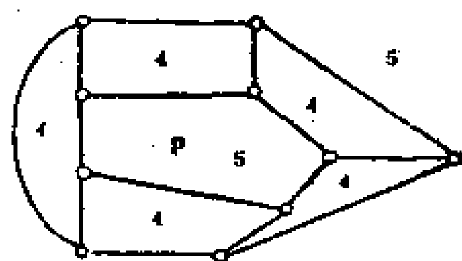


2. 若 x、y、z 中有两条没有使用（令这两条没有使用的棱就是 y 和 z），那么就非使用 p、q、r 不可，于是围成了一个"早熟的"三角形；而这是不可能的. 所以 x、y、z 之中至少必须用两条. 但又不能三条都用，因为三条都用时，(a) 用了 r 就不能用 p、q，即是在顶点 K 的三条棱有两条没有用

到．这不行；(b) 所以不可能用 r，那就得把 p、q 都用到；同样道理，a、b 与 m、n 也得用起来，围成了一个"早熟的"九边形．因此恰好只能使用 x、y、z 中的两条棱．若一条哈密尔顿回路即包含 p 也包含 q，则不可能用到 r，于是就必须动用 y 和 z 了．然而又恰好只能用 x、y、z 中的两条，这就取消了 x．



3．柯泽勒夫—格林贝格关系式给出 $2(f_4-f_4')+3(f_5-f_5')=0$；由于 f_4 与 f_4' 之和为奇数 5，故 f_4 与 f_4' 不能相等，所以 f_4-f_4' 不为零，故 f_5-f_5' 也不能为零．又因只有两个五边形，所以 f_5-f_5' 要么等于 2，要么等于 -2．这样一来，这两个五边形就位于任意一条哈密尔顿回路的同一侧了．由于无限大的五边形在外侧，所以 P 也在外侧，故



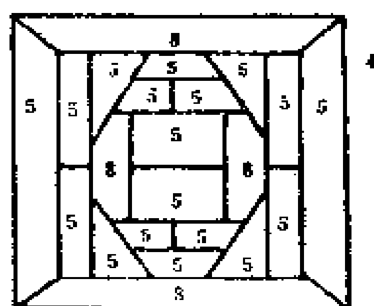
$$f_5-f_5'=-2,$$

于是得到

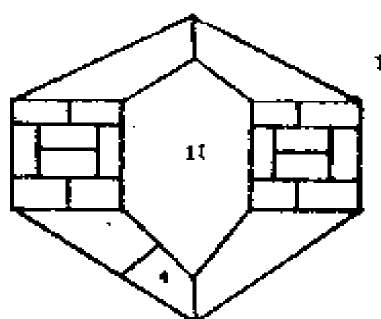
$$2(f_4-f_4')-6=0 \quad \text{亦即} \quad f_4-f_4'=3.$$

由于有 5 个四边形，仅有的可能就是 $f_4=4$，$f_4'=1$。由于 P 的每条棱都是 P 与某一个四边形的分界线，所以它的棱中恰好有 4 条属于一条哈密尔顿回路而有一条不属于这条回路。

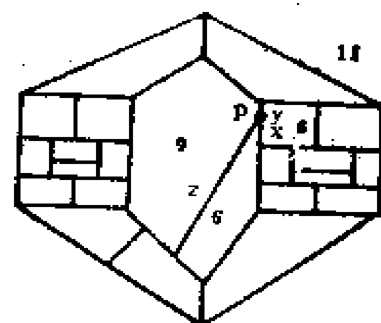
4．(a) 只有一个四边形，故 $-2+3(f_5-f_5')+6(f_8-f_8')=0$，这意味着 3 整除 2；不可能。



(b) 这里有一个四边形、两个十一边形和许多五边形，故 $\pm 2+3(f_5-f_5')+9(f_{11}-f_{11}')=0$，这蕴涵 3 整除 2，不可能。

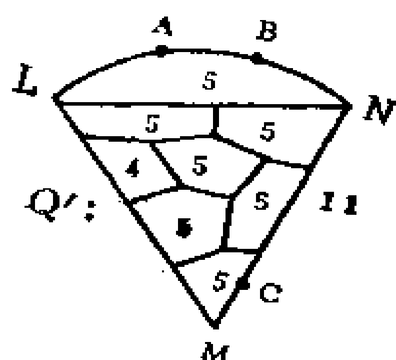


(c) 这个图就象 (b) 中的那个图，只不过多了一条棱，于是就有 2 个六边形，1 个九边形，1 个十一边形，一大堆五边形；所以 $3(f_5-f_5')+4(f_6-f_6')\pm 7-9=0$。但 $f_6-f_6'=0$、2 或 -2，若取 0，则 3 整除 7，这不



可能. 所以只能取 2 或 -2, 于是 $3(f_5-f_5')\pm 8\pm 7=9$. 由于 $f_6-f_6'=2$ 或 -2, 两个六边形都位于任意一条哈密尔顿回路的同一侧, 这就是说, 在顶点 P 处不能用棱 x, 于是非把 y 和 z 都用上不可. 这说明九边形与六边形各在哈密尔顿回路的一侧, 因而前面等式中的 8 与 7 前的符号相异. 所以我们得到 $3(f_5-f_5')\pm 1=9$, 此式蕴涵 3 整除 1, 不可能.

5. 让 Q 表示我们的图. M 处的价为 2, 故 M 处的两条棱和 LN 一样, 都属于哈密尔顿回路.



在 LN 上添两个顶点 A 与 B, 在 M 处的一条棱上添一个顶点 C, 作成一个新图 Q'. 于是, Q 的一条哈密尔顿回路由于含有 LN 和 M 处的两条棱, 必然给出 Q' 的一条哈密尔顿回路. Q' 的多边形是四边形、五边和十一边形. 柯泽勒夫—格林贝格条件

$$2(f_4-f_4')+3(f_5-f_5')+9(f_{11}-f_{11}')=0$$

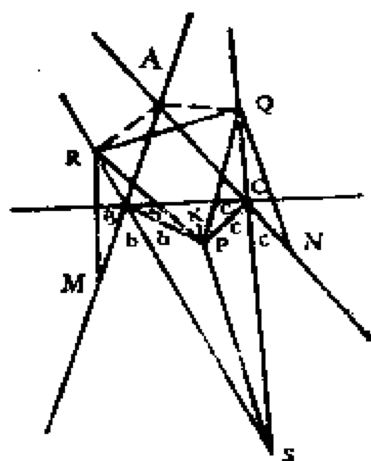
表明 f_4-f_4' 被 3 整除. 然而只有一个四边形, f_4-f_4' 只能为 1 或 -1.

八、莫利定理

1．$S=180°-2b-2c$，$\frac{1}{2}S=90°-b-c$．故$\angle BPR=180°-b-30°-\frac{1}{2}S=150°-b-90°+b+c=60°+c$．同样得$\angle CPQ=60°+b$．

3．这三条线是等边三角形PQR的角平分线．

5．令外角等于$3a$、$3b$、$3c$，则$3a+3b+3c=360°$，即$a+b+c=120°$．于是a、b、c中至少有一个$\geqslant 40$度，比如说就是a吧，那么$b+c\leqslant 80°$，即$2b+2c\leqslant 160°$，这意味着A与S在BC的异侧．由$S=180°-2b-2c=180°-(240°-2a)=2a-60°$得$\frac{1}{2}S=a-30°$．(注意：$3a<180°$，故$a<60°$，所以$a-30°<30°$)



在SP的延长线SK上作$\angle KPR=30°$，$\angle KPQ=30°$，所以点R、Q分别在SB、SC的延长线上．三角形RPS与QPS全等，因为PS是$\triangle BCS$的第三条角平分线(可用ASA)．故$RP=QP$．因$\angle RPQ=60°$，故$\triangle PQR$是等边

三角形．剩下该证明的是，RA、QA 都是 A 处外角的三等分线．点 P 对 BS 与 CS 的对称点是 M 与 N，则 $MR=RP=PQ=QN$，并且还要等于 QR．$\angle MRQ=60°+2(\angle BRP)=60°+2\left(30°-\frac{1}{2}S\right)$ $=120°-S=180°-2a$，$\angle RQN$ 也一样大．同先前一样，$MRQN$ 内接于一个圆．联结 R 的那条半径平分 $\angle MRQ$；换句话说，MR 在这个圆上张成的圆心角是

$$180°-2\left(\frac{1}{2}\angle MRQ\right)=180°-(180°-2a)=2a.$$

所以 MR 张成的圆周角大小为 a；QR 与 $\overline{QN}$ 也一样．因而 MN 张成的圆心角大小为 $6a$；由于 a 至少有 $40°$，故这个角为优角．MN 在圆心所张成的非优角就该是 $360°-6a$．在包含圆心的弓形上，MN 张成的圆周角是 $180°-3a$，而这就是已给三角形 ABC 的角 A，所以顶点 A 在这个圆的这个弓形上．R、Q 也在同一弓形上，所以 $\angle RAM=a$，$\angle QAN=a$，蕴涵所需的结论．

九、一个组合分析问题

1．令三角形个数是 t，则图中全部角的度数总和是

$$180t=360m+(n-2)\cdot 180,$$

由此得

$$t=2m+n-2.$$

2. （反证法）假设所有的面的棱数都不同. 棱数最少的一面至少有 3 条棱；"第二大"的至少有 4 条棱，等等，直到最大的那一个即按此顺序的第 F 个面必定至少有 $F+2$ 条棱. 但这个最大的面四周的每条棱都表示一个相邻的面，故必有至少 $F+3$ 个面；矛盾了——实有 F 个面.

4. 一个 $a\times b$ 矩形在棋盘上纵横分别有 $9-a$ 与 $9-b$ 个位置，故在棋盘上总共有 $(9-a)(9-b)$ 个位置. 所以矩形个数总共有 $\Sigma(9-a)(9-b)$个，式中 a、b 取遍 1、2、3、4、5、6、7、8. $a=1$ 时，得到 $8[8+7+\cdots+1]=8\cdot36$ （b 依次取 1、2、…、8 等值）. $a=2$ 时，得 7〔同等数量〕$=7\cdot36$，等等. 总和为 $[8+7+\cdots+1]\cdot36=36\cdot36=36^2=1296$. 对正方形的情形，我们只考虑使 $a=b$ 的那些值.所以总和为 $8\cdot8+7\cdot7+\cdots+1\cdot1=204$.同样，对 $n\times n$ 的棋盘来说，矩形的总数为 $[n(n+1)/2]^2$，这不过就是前 n 个自然数的立方和；正方形的总数不过就是前 n 个自然数的平方和而已.

8. 具有中心对称性的多边形，每条边的对面都是一条与它平行且相等的边，所以这种多边形的边数为偶数. 任何一个这样的四边形必然是平行四边形，所以我们需要证明的是，至少有六个面是四边

形．让 F_n 表示 n 边形面的个数，于是 n 为奇数时，$F_n=0$．让 V_n 表示 n 价顶点的个数，那末 $F=F_3+F_4+F_5+\cdots$，$V=V_3+V_4+V_5+\cdots$；由于 $F_{2k+1}=0$，故 $F=F_4+F_6+F_8+\cdots$．我们要证明 $F_4\geqslant 6$．数一数各面周围的棱以及顶点周围的棱，我们便得到

$$2E=4F_4+6F_6+8F_8+\cdots,$$

$$2E=3V_3+4V_4+5V_5+\cdots.$$

而 $V-E+F=2$，即 $6V-6E+6F=12$，

亦即 $6V-2E+6F=12+4E$．

所以

$$6(V_3+V_4+V_5+\cdots)-(4F_4+6F_6+8F_8+\cdots)+6(F_4+F_6+F_8+\cdots)$$

$$=12+2(3V_3+4V_4+5V_5+\cdots),$$

$$2F_4-2F_8-4F_{10}-6F_{12}-\cdots$$

$$=12+2V_4+4V_5+6V_6+\cdots,$$

由此得

$$F_4=6+(V_4+2V_5+3V_6+\cdots)+(F_8+2F_{10}+3F_{12}+\cdots),$$

此式蕴涵 $F_4\geqslant 6$．

9．让 n 表示五边形面的个数，于是六边形面的个数为 $F-n$．数一下棱数就得到 $2E=5n+6(F-n)$，于是 $n=6F-2E$．因为每个顶点的价都是 3，其平均数也是3，因而有 $2E=3V$．既然 $V-E+F=2$，所以 $\frac{2}{3}E-E+F=2$，也就是 $6F-2E=12$，故五边形面的个数为 12．

十、多倍完美数，过剩数，实用数

4．假设 $\sigma(n)$是奇数。将 n 表示成 $2^a k$ 的形式，k 为奇数．那么 $\sigma(n)=\sigma(2^a k)=\sigma(2^a)\cdot\sigma(k)=(2^{a+1}-1)\sigma(k)$ 是奇数，而 $2^{a+1}-1$ 又是奇数，故 $\sigma(k)$ 是奇数．然而由于 k 是奇数，它的全部因子也都是奇数，要使 $\sigma(k)$ 为奇数．则 k 必须有奇数个因子，因而 k 必定是一个平方数，比如说是 m^2，于是 $n=2^a\cdot m^2$．若 a 是偶数，则 n 也是一个平方数；若 a 是奇数，则 n 是一个平方数的二倍．

反过来，若 n 是一个平方数（t^2）或一个平方数的二倍（$2t^2$），我们可论证如下：

假设 t 的素因子分解为 $t=2^b\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_v^{\alpha_v}$，则 $t^2=2^{2b}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot p_3^{2\alpha_3}\cdots p_v^{2\alpha_v}$，$2t^2=2^{2b+1}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot p_3^{2\alpha_3}\cdots\cdot p_v^{2\alpha_v}$．于是 $\sigma(n)=\sigma(t^2)=(2^{2b+1}-1)\cdot\sigma(p_2^{2\alpha_2})\cdot\sigma(p_3^{2\alpha_3})\cdots\sigma(p_v^{2\alpha_v})$，或 $\sigma(n)=\sigma(2t^2)=(2^{2b+2}-1)\cdot\sigma(p_2^{2\alpha_2})\cdot\sigma(p_3^{2\alpha_3})\cdots\sigma(p_v^{2\alpha_v})$，这里的每个 p_i（$i=2、3、\cdots、v$）都是奇素数，因而 $p_i^{2\alpha_i}$ 的每个因子 p_i^m 都是奇数．由于指数 $2\alpha_i$ 是偶数，所以 $\sigma(p_i^{2\alpha_i})=1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{2\alpha_i}$ 的值也是奇数．而 $2^{2b+1}-1$ 与 $2^{2b+2}-1$ 是奇数，故在一切情况下 $\sigma(n)$ 都是奇数．

所以当 n 为自然数时，$\sigma(n)$ 为奇数的充要条件是：n 是一个平方数或一个平方数的二倍。

5．让 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示奇完美数，那末所有的素数 p_i 都是奇数。因为 n 是完美数，所以

$$\sigma(n)=\sigma(p_1^{\alpha_1})\cdot\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdots\sigma(p_k^{\alpha_k})$$

$$=2\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

右端的素因子分解只有单独一个 2，所以左端也是这样。从而 $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ 中有一个的素因子分解含有单独一个 2，而其余的皆为奇数。既然只有一个 2，这个 $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ 就是某奇数的二倍。为确定起见，假设 $\sigma(p_1^{\alpha_1})=2(2q+1)=4q+2$。由于 $i=2,3,\cdots,k$ 时 $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ 为奇数，故 $p_i^{\alpha_i}$ 或为一平方数，或为一平方数的二倍。由于 $p_i^{\alpha_i}$ 为奇数，因而不可能是一个平方数的二倍。所以每个 $p_i^{\alpha_i}$ 只能是一个平方数，这意味着

$$p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}=Q^2$$

是一个平方数。现在我们来证明 $\alpha_1=4a+1$，式中 a 为整数。我们知道 $\sigma(p_1^{\alpha_1})=4q+2\equiv 2\pmod 4$，即是

$$1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1}\equiv 2\pmod 4.$$

由于 $\sigma(p_1^{\alpha_1})$ 是偶数，α_1 必然是奇数。因而 α_1 具有

$4t+1$ 或 $4t+3$ 的形式．假设 $a_1=4t+3$，然后来引出矛盾．我们知道，$\sigma(p_1^{4t+3})$ 有 $4t+4$ 项，每一项都是一个奇素数(p_1)的乘方．

因 p_1 是奇数，故 $p_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 或 $p_1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$．

当 $p_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 时，p_1 的每个乘方 $\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，这蕴涵 $\sigma(p_1^{4t+3})\equiv(4t+4)\cdot 1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$，这是个矛盾．若 $p_1\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$，则 p_1 的偶次方 $\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ 而奇次方 $\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$；亦即 p_1 的偶次方与奇次方之和 $\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$．所以

$$\sigma(p_1^{4t+3})=(1+p_1)+(p_1^2+p_1^3)+\cdots$$
$$+(p_1^{4t+2}+p_1^{4t+3})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4),$$

这也是一个矛盾．

十一、圆，正方形和格子点

1．Ⅰ：若 $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c$，则

$$|a|=\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|\leqslant\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c;$$

$$|b|=\left|\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|-\frac{a-b}{2}\right|=\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c.$$

Ⅰ：若$|a|<c$且$|b|<c$，则当$(a+b)/2$，$(a-b)/2$中有一个为零时，另一个必为a。所以

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|=|a|<c.$$

$(a+b)/2$和$(a-b)/2$非零时，若它们同号则

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|=\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right|=|a|<c;$$

若它们异号则

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|=\left|\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right|=|b|<c.$$（证毕）

2．我们证明，以$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$为心的任何球面上至多只有一个格子点，否则有两个格子点(a,b,c)和(d,e,f)，满足

$$(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2+(c-\sqrt{5})^2$$
$$=(d-\sqrt{2})^2+(e-\sqrt{3})^2+(f-\sqrt{5})^2,$$

或

$$\sqrt{2}(2d-2a)+\sqrt{3}(2e-2b)+\sqrt{5}(2f-2c)$$
$$=d^2+e^2+f^2-a^2-b^2-c^2.$$

稍后我们将证明一个引理：若$p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{5}=$有理数，则$p=q=r=0$。由此得出$a=d,b=e,c=f$，这就表明$(a,b,c)$与$(d,e,f)$是同一个点：矛盾了。（证毕）

因此，任何两个格子点与$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$的距离都不相同，于是，格子点按其与$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$的距离增大的顺序可以排成一个点列：$p_1,p_2,\cdots$。

$p_n, \cdots$，因而以（$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$）为球心且通过 p_{n+1} 的球，其内部恰好包含 n 个格子点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$.（证毕）

引理 若 $p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{5}=$有理数，则 $p=q=r=0$（p, q, r 为有理数）。

证明 让 $p\sqrt{2}+q\sqrt{3}+r\sqrt{5}=k$ 是一个有理数。那末，$p\sqrt{2}+q\sqrt{3}=k-r\sqrt{5}$，因而 $2p^2+2pq\sqrt{6}+3q^2=k^2-2kr\sqrt{5}+5r^2$，所以 $2pq\sqrt{6}+2kr\sqrt{5}=k^2+5r^2-2p^2-3q^2$ 是有理数。将此数表示成 $a\sqrt{6}+b\sqrt{5}=c$，式中 a, b, c 是有理数，于是 $6a^2+5b^2-c^2=-2ab\sqrt{30}$.

由于 $\sqrt{30}$ 是无理数，因而必定有 $2ab=0$，即 a 或 b 为零，而 $6a^2+5b^2-c^2=0$。今假设 $a=0$，则 $b\sqrt{5}=c$，这蕴涵 $b=c=0$。若 $b=0$，则 $a\sqrt{6}=c$，这蕴涵 $a=c=0$. 无论哪种情况下都有 $a=b=c=0$.

这样一来，$2pq=2kr=k^2+5r^2-2p^2-3q^2=0$. 因而 p 或 q 有一个为 0。假设 $p=0$，则 $q\sqrt{3}+r\sqrt{5}=k$，就象讨论 $a\sqrt{6}+b\sqrt{5}=c$ 一样，我们得到 $q=r=k=0$。$q=0$ 的情况也一样。所以无论什么情况，总是 $p=q=r=0$。（证毕）

3．只需证明：对每个有理点 (x, y)，有两个格子点与之等距．于是，若圆心为 (x, y) 的一个圆通过这两个格子点，且其内部包含 n 个格子点，则圆

心为 (x,y) 的每个更大的圆至少包含 $n+2$ 个格子点，从而以 (x,y) 为圆心的圆没有一个能够恰好包含 $n+1$ 个格子点.

让 $x=p/q$，$y=r/q$. 此时已通分为具有相同的正分母了（所以 p 与 r 可正可负.）于是格子点 $(r,-p)$ 及 $(-r,p)$ 与 $(x,y)=(p/q,r/q)$ 等距，因为

$$\left(r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(-p-\frac{r}{q}\right)^2=\left(-r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(p-\frac{r}{q}\right)^2.$$

（证毕）

十二、递推关系

2. 让 t 表示三角形的个数，则图中全部角的度数总计为

$$180\,t=(n-2)180,$$

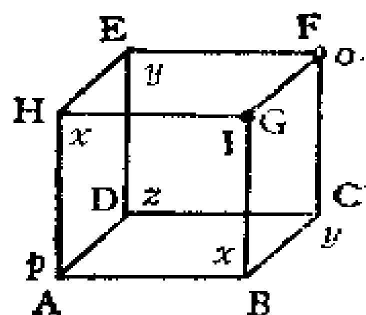
这是因为所有的角都是在 n 边形的顶点. 因此 $t=n-2$.

让 d 表示对角线的条数. 每个三角形按三条边计，边的总数就是 $3n-6$. 然而这种算法把每条对角线都算过两次，n 边形的每条边只算了一次. 所以

$$3n-6=2d+n,\ 由此得\ d=n-3.$$

3. 用 x 表示苍蝇从 H 出发在 G 被粘住的概率，同样，用 y，z 分别表示从顶点 E 与 D 处出发在

G 被粘住的概率．由于对称性，从点 B 与点 C 处出发被粘住的概率分别为 x,y。用 p 表示所求的概率，于是有



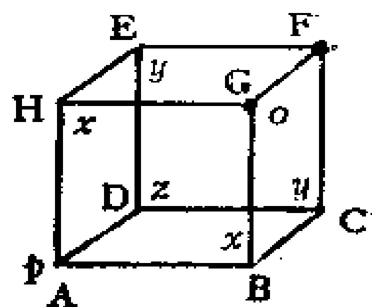
$$p=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z;$$

$$x=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\cdot 1;$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot 0;$$

$$z=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y.$$

解之得 $p=\frac{4}{7}$.



考虑在 F 点被粘住的概率，我们可得类似的方程，解之得 $p=3/7$。所以苍蝇根本不会被粘住的概率就是

$$1-\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\right)=0.$$

4．很容易得出 $(1-x-x^2)F(x)=1$．令 $x^2+x-1=0$ 的根为 y,z，则 $x^2+x-1=(x-y)(x-z)$，即 $1-x-x^2=-(y-x)(z-x)$．令 $F(x)=1/(1-x-x^2)=A/(y-x)+B/(z-x)$，那么 $1=-A(z-x)-B(y-x)$．令系数相等：$A+B=0$，$-Az-By=1$．于是得 $B=-A$；$B(z-y)=1$，即 $B=1/(z-y)$，以及 $A=-1/(z-y)$．这时有

$$F(x)=\frac{1}{z-y}\left[-\frac{1}{y-x}+\frac{1}{z-x}\right].$$

y 与 z 的具体数值是 $y=(-1+\sqrt{5})/2$, $z=(-1-\sqrt{5})/2$, 因而 $z-y=-\sqrt{5}$. 从而

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{y-x}-\frac{1}{z-x}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(y-x)^{-1}-(z-x)^{-1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[y^{-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{-1}-z^{-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-1}\right].$$

再注意根 y 与 z 之积为 -1,所以 y 与 z 互为负倒数. 于是得

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-z\left(1-\frac{x}{y}\right)^{-1}+y\left(1-\frac{x}{z}\right)^{-1}\right].$$

既然 $(1-w)^{-1}$ 的展式中各项系数均为 1, 比较 x^n 的系数得

$$f_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-z\left(\frac{1}{y}\right)^n+y\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(-z)^{n+1}-(-y)^{n+1}],$$

或记为

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(-z)^n-(-y)^n],$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

我们借此机会附上

比内公式最美妙的推导

引理 若 $x^2=x+1$，则 $x^n=f_nx+f_{n-1}$，$n=2、3、4\cdots$

证明 （归纳法）。$n=2$ 时，$x^2=x+1=f_2x+f_1$，合乎引理．现设 $x^n=f_nx+f_{n-1}$，那么 $x^{n+1}=x\cdot x^n=f_nx^2+f_{n-1}x$，即 $x^{n+1}=f_n(x+1)+f_{n-1}x=(f_n+f_{n-1})x+f_n=f_{n+1}x+f_n$．按归纳法原理，引理得证．

现在令 $x^2-x-1=0$ 的根为 y 与 z．当 $n=2,3,\cdots$ 时，根据引理有 $y^n=f_ny+f_{n-1}$，$z^n=f_nz+f_{n-1}$．相减得 $y^n-z^n=f_n(y-z)$，亦即 $f_n=(y^n-z^n)/(y-z)$．但 y 与 z 正好等于 $(1+\sqrt{5})/2$ 与 $(1-\sqrt{5})/2$．所以

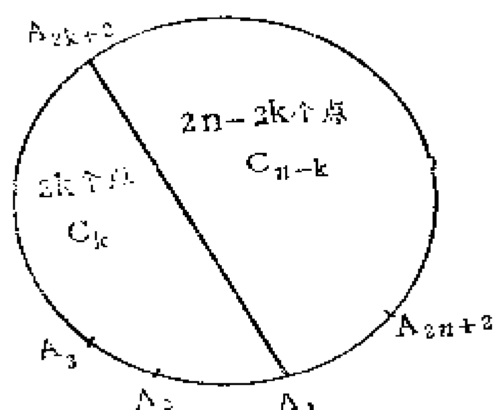
$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

5．掷骰子时 1、2、3、4、5、6 诸数中每个数的出现是机会均等的，那么，掷六次，我们可以预期它们各出现一次，即掷六次数值总计 21，亦即每掷两次的值为 7．于是每掷两次，我们可以期望累计数值增大 7．因此我们可以期望，累计数在每七个值中取值两次．于是随意指定的一个整数成为一个累计数的概率是 2/7．

6．$2n$ 个点的联法设为 C_n 种．现在考虑 $2n+2$

个点（其联法为 C_{n+1} 种）.

把 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+2}$ 诸点依次排到圆周上. 设 A_1 与 A_t 联结. 若 $t=3$, 我们看出, 任何一条到 A_2 的弦必然与 A_1A_3 交叉. 由归纳法可见, 若 t 为任意奇数, 也会出现同样的不该有的情况. 因此 t 为偶数, 就令它为 $2k+2$.



弦 A_1A_{2k+2} 把所有点分成两类：一类有 $2k$ 个点, 一类有 $2n-2k$ 个点. 第一类有 C_k 种联法, 第二类有 C_{n-k} 种联法, 任何第一类联法与任何第二类联法结合起来, 便得到 $2n+2$ 个点的一个联法, 故

$$c_{n+1}=\sum_{k=0}^{k=n} c_k c_{n-k}, \quad \text{此式中 } c_0=1.$$

照正文一样办, 于是我们得 $c_n=(2n)!/n!(n+1)!$.

十三、普勒数，超普勒数以及其它有关的数

4. 对第一部分, 我们直接试验得到答案 $n=6$. 对 $n=1、2、3、4、5、6$, 我们有 $3^n-3=0、6、24、78、240、$

726 和 $2^n-2=0、2、6、14、30、62$；当 $n=1、2、3、5$ 时，n 整除两者；$n=4$ 时，n 不能整除 3^n-3；$n=6$ 时，n 整除 $3^n-3=726$，但不能整除 $2^n-2=62$。

关于第二部分，我们推理如下．由于 n 不整除 3^n-3，所以 n 不可能是素数（费马小定理）．于是 n 是合成数且整除 2^n-2，因而成了一个假素数．于是我们来寻求不能整除 3^n-3 的最小假素数．因为 $n=341$ 是最小的假素数，就首先来试一试它．我们发现它就不能整除 $3^{341}-3$，因为我们可以证明它的因子 31不能整除 $3^{341}-3$。以 31 为模，我们有 $3^3=27\equiv-4$，$3^9\equiv-64\equiv-2$，$3^{54}\equiv64\equiv2$，$3^{324}\equiv64\equiv2$；而 $3^6\equiv16$，$3^2\equiv9$，故 $3^8\equiv20$；于是 $3^{17}\equiv3^9\cdot3^8\equiv(-2)\cdot20\equiv-40\equiv-9$，$3^{341}\equiv2(-9)\equiv-18$，结果 $3^{341}-3\equiv-21$，不同余于零．

5．根据费马小定理，每个素数 P 都整除 2^p-2．若 P 也整除 2^p+1，则能整除它们之差 3．唯一能整除 3 的素数是 $p=3$，而且我们发现 3 确能整除 $2^3+1=8+1=9$．所以 $p=3$．

6．自然数分四种：1，合成数，偶素数 2，奇素数．现在一种一种地考虑．

$a=1$．我们来找一个合成数 n，使得 n 整除 $1^n-1=0$．任意合成数都行，具体来说，最小的合成数 4 就行了．

a 是合成数．这时可以用 $n=a$，因为 a^n-a 可被

a 整除，且 a 为合成数．

a 是奇素数．这时可以用 $n=2a$，被除数便是偶数 $a^{2a}-a$(式中两项都是奇数)．$a^{2a}-a$ 是偶数，故可被 2 整除，而且显然又能被 a 整除，所以可被 $n=2a$ 整除（因为 a 是奇数）．

$a=2$．这时可以用任意假素数，比如说用 $n=341$．

索　　引

按汉语音序排列，数字表示页数

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z